

1. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

2. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

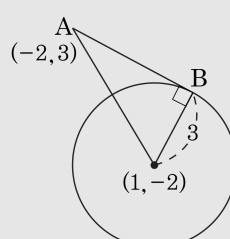
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 (1, -2), 반지름은 3 이므로

$$AB = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



3. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 (5, 0)이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

4. 원 $x^2 + y^2 + 2y = 0$ 과 직선 $y = mx - 3$ 이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?
- ① $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$
 ③ $-1 < m < 1$ ④ $-2 < m < 2$
 ⑤ $-3 < m < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ y = mx - 3 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면
 $(m^2 + 1)x^2 - 4mx + 3 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
 $\frac{D}{4} = (-2m)^2 - 3(m^2 + 1) = m^2 - 3$
 원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4} = m^2 - 3 < 0$
 $\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

해설

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 변형하면
 각각 $x^2 + (y + 1)^2 = 1, mx - y - 3 = 0$
 이 때, 원의 중심 $(0, -1)$ 에서
 직선 $y = mx - 3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$$d = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}$$
 원과 직선이 만나지 않으려면
 $\frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$ 이어야 하므로
 $\sqrt{m^2 + 1} < 2, m^2 < 3$
 $\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

5. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때, } d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

6. 원 $x^2 + y^2 = k$ 와 직선 $y = -x + 1$ 이 만나지 않기 위한 실수 k 의 값의 범위는? (단, $k > 0$)

- ㉠ $0 < k < \frac{1}{2}$ ㉡ $\frac{1}{2} < k < 1$ ㉢ $1 < k < \frac{3}{2}$
㉣ $\frac{3}{2} < k < 2$ ㉤ $k > 2$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면 원의 중심과
직선 사이의 거리 d 와 반지름의 길이
 r 에 대하여 $d > r$ 이어야 한다.

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} > \sqrt{k} \text{ (단, } k > 0 \text{)}$$

$$\therefore 0 < k < \frac{1}{2}$$

7. 중심이 C(1, 2) 이고, 직선 L : $x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 방정식을 구하면?

- ① $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ ② $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 6$
③ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 7$ ④ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$
⑤ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

해설

중심에서 접선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

∴ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

8. 중심이 C(1, 2)이고, 직선 L : $x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

∴ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

9. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x 축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로
 $x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 8) = 0$
 $\Rightarrow x = -2, -8$
 $\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$
 $\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

10. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ 에 의하여 잘리는 x 축 위의 선분의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원이 x 축과 만나는 점은 $y = 0$ 을 대입하여 계산한다.

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, 3$$

$\therefore x$ 축 위의 선분의 길이 : 2

11. 반지름의 길이가 2 이고, 중심이 (4, 4) 인 원이 있다. 원점 O 와 중심을 잇는 선분이 원과 만나는 점을 (a, b) 라고 할 때, a 의 값은?

- ① 3
- ② 4 - √2
- ③ 1 + √2
- ④ 2 + √2
- ⑤ 3 - √2

해설

원의 방정식을 구해보면
 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2^2 \dots \textcircled{1}$
원점과 (4, 4) 를 잇는 선분의 방정식:
 $y = x \dots \textcircled{2}$
①, ② 를 연립하면,
 $x = 4 \pm \sqrt{2}, y = 4 \pm \sqrt{2}$
 $\therefore (a, b) = (4 - \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$
($\because 0 < a < 4, 0 < b < 4$)

12. 직선 $y = 2x + k$ 와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$ 이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② -4 ③ 4 ④ 10 ⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ 이므로
중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이다. 두 교점 사이의 거리의
최댓값은 직선 $y = 2x + k$ 가 원의 중심 $(2, 0)$ 을 지날 때이므로
 $k = -4$

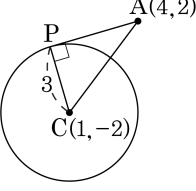
13. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
 $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{CP} = 3$
 $\therefore \overline{AP} = 4$



14. 직선 $(a-1)x - (a-2)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

따라서 원의 중심 $(1, 2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a-1) \times 1 - (a-2) \times 2 - 1 = 0$

$$\therefore a = 2$$

15. 직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

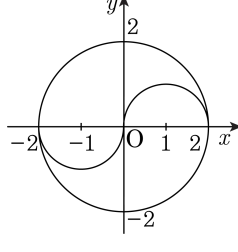
따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a + (1-a)\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

16. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x - 1)$ 이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

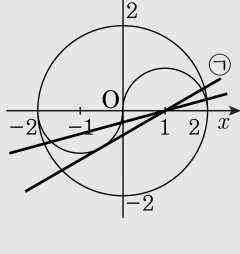


- ① $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$
 ② $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$
- ③ $0 < a < \frac{2}{3}$
 ④ $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$
- ⑤ $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y = a(x - 1)$ 의 그래프는 실수 a 의 값에

관계없이 항상 점 $(1, 0)$ 을 지나므로 직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x 축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a > 0$

직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,

점 $(-1, 0)$ 과 직선 $y = a(x - 1)$,

즉 $ax - y - a = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-a - 0 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2 + 1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a 의 값의 범위는

$$0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

17. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와
 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이
 증명하였다.

㉔, ㉕, ㉖에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
 $y = mx \cdots \cdots \textcircled{㉑}$
 원 C의 방정식을 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$
 $(a > 0, r > 0) \cdots \cdots \textcircled{㉒}$ 라 하자
 $\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 $(1 + m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉓}$
 $\textcircled{㉓}$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 $\alpha\beta = (\textcircled{㉔})$
 따라서 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = (\textcircled{㉕}) \cdot |\alpha\beta| = (\textcircled{㉖})$
 그러므로 m 에 관계없이 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값은 일정하다.

- ① $\frac{a^2 - r^2}{1 - m^2}, 1 - m^2, |a^2 - r^2|$
 ② $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, 1 + m^2, |a^2 - r^2|$
 ③ $\frac{a^2 - r^2}{1 - m^2}, 2(1 - m^2), 2|a^2 - r^2|$
 ④ $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, 2(1 + m^2), 2|a^2 - r^2|$
 ⑤ $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, r(1 + m^2), r|a^2 - r^2|$

해설

$\textcircled{㉓}$ 에서 근과 계수와의 관계에서
 $\alpha\beta = \frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$
 $A(\alpha, m\alpha), B(\beta, m\beta)$ 이므로
 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
 $= (1 + m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$

18. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

$$\textcircled{1} \quad -\frac{3}{2}$$

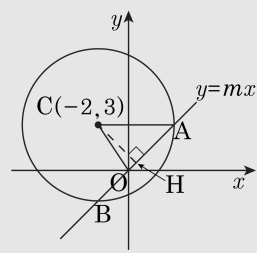
② $-\frac{2}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 $C(-2, 3)$ 에서
직선 $y = mx$ 에 내리 수선의 발을 H 라 하면

적선 $y = mx$ 에 내린 두선의 길들 h 나 하면

$$\Delta CAH \text{에서 } \overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2 \\ = 25 - \overline{CH}^2$$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$ 가 최소이다.

$$\Delta\text{COH} \text{에서 } \overline{\text{CH}}^2 = \overline{\text{CO}}^2 - \overline{\text{OH}}^2$$

$\overline{CH}$ 가 최대가 되기 위해서는

$\overline{CH} = \overline{CO} \ (\overline{OH} = 0)$ 일 때이므로

$$\overline{CO} \perp \overline{AB}$$

직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

19. 한 점 $P(a, b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 인 점 $P(a, b)$ 의 자취를 구하면?

- ① $2a - 3b - 7 = 0$ ② $2a - 3b + 7 = 0$
 ③ $a^2 + b^2 = 3$ ④ $a^2 + b^2 = 4$
 ⑤ $a^2 + b^2 = 5$

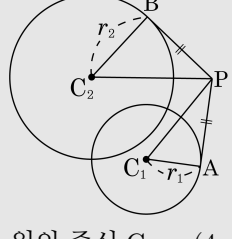
해설

$$(x-4)^2+(y+1)^2=4, (x-2)^2+(y-2)^2=9$$

문제의 조건에서

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{이므로 } (\overline{PA})^2 = (\overline{PB})^2$$

$$\Rightarrow (\overline{PC_1})^2 - r_1^2 = (\overline{PC_2})^2 - r_2^2$$



원의 중심 $C_1 = (4, -1)$, $C_2 = (2, 2)$,

반지름 $r_1 = 2$, $r_2 = 3$

$$\therefore (a-4)^2 + (b+1)^2 - 4 = (a-2)^2 + (b-2)^2 - 9$$

$\therefore$ 위를 정리하면 $2a - 3b - 7 = 0$

20. 다음 중 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 에 접하고 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

- ① $x+\sqrt{3}y=1$ ② $\sqrt{3}x+y=1$ ③ $x-\sqrt{3}y=-1$
- ④ $\sqrt{3}x-y=-3$ ⑤ $x+y=2$

해설

원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하기 위해서는 중심 $(1,0)$ 을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$ 을 지나는 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은
 $y=m(x-1)$, $mx-y-m=0$
중심 $(-1,0)$ 에서 이 직선에 이르는 거리가
반지름 1과 같으면 된다.
 $\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$
 $\therefore m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
대입하여 정리하면,
 $x+\sqrt{3}y=1$ 또는 $x-\sqrt{3}y=1$