1. 두 원 O_1, O_2의 중심거리가 $d=7$이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.
② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다.
④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d=r_1+r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

2. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고 두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로 두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

3. 반지름의 길이가 각각 4 cm, 9 cm 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① 8 cm ② 10 cm ③ 11 cm ④ 12 cm ⑤ 14 cm

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
13 cm 이다.
공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2-(9-4)^2}=12$

4. 두 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, $x^2+y^2=r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을
$C_1 : (x-3)^2+(y-4)^2=9$ ← 중심 $(3,4)$
$C_2 : x^2+y^2=r^2 (r>0)$ ← 중심 $(0,0)$
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다.
이 때, $|r-3|=5$ 이어야 하므로 $r-3=\pm 5$
$\therefore r=8 (\because r>0)$

5. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점 $(1,1)$ 을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$
교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$
의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$ 을지나므로
$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$
$\therefore m=-2$
이 값을 대입하고 정리하면
$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.
$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$
그러므로 $A+B-C=10$

6. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.

∴ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

7. 실수 $a,\ b$ 와 두 원

A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,

B : $(x+1)^2+(y-1)^2=3$ 에 대하여

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, $a,\ b$ 사이의 관계식은?

① $a+b=-3$ ② $a+b=-2$ ③ $a-b=-1$

④ $a^2+b^2=1$ ⑤ $a^2+b^2=2$

해설

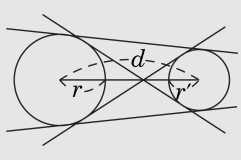
원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 $(-1,\ 1)$ 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(a+1)x-(b+1)y=0\cdots\cdots$㉠
㉠이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로
$(a+1)\times(-1)+(b+1)\times 1=0$
$\therefore a+b=-2$

8. 다음 두 원 $x^2+y^2=3^2, (x-9)^2+y^2=2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

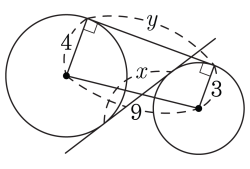
▷ 정답 : 4 개

해설



먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r+r'$, 차 $r\sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.
두 원의 반지름의 길이를 각각 $r=3, r'=2$ 로 놓으면
$r+r'=5, r\sim r'=1$ $d=9$ 이므로
$r+r'<d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

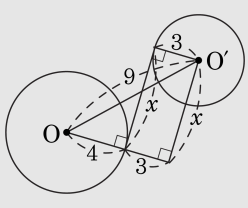
9. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.



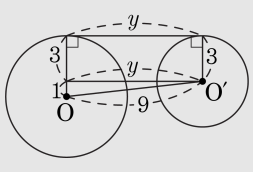
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



$9^2 = (4+3)^2 + x^2 \quad \therefore \; x^2 = 9^2 - 7^2$



$9^2 = y^2 + (4-3)^2 \quad \therefore \; y^2 = 9^2 - 1^2$

$\therefore \; x^2 + y^2 = 2 \cdot 9^2 - 7^2 - 1^2 \; = 112$

10. 두 원 $x^2+y^2-2=0$, $x^2+y^2+kx-4y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x+2y+1=0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-2-(x^2+y^2+kx-4y-1)=0$
$\therefore kx-4y+1=0$
이 직선이 직선 $x+2y+1=0$ 과 평행하므로
$\frac{k}{1}=\frac{-4}{2}\neq\frac{1}{1}$
$\therefore\ k=-2$

11. 두 원 $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4y-1=0$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{95}$ ② $\frac{\sqrt{95}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{95}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{95}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

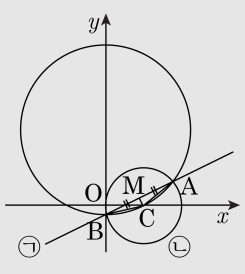
$x^2+y^2-2x-\left(x^2+y^2-4y-1\right)=0$

$-2x+4y+1=0,\ 2x-4y-1=0\cdots\cdots$㉠

$x^2+y^2-2x=0$에서

$(x-1)^2+y^2=1\cdots\cdots$㉡

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B, $\overline{AB}$의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C$(1,0)$이라 하면



중심 C$(1,0)$에서 직선 ㉠까지의 거리 $\overline{CM}$은

$$\overline{CM}=\frac{|2-0-1|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AM}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

$$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\cdot\frac{\sqrt{95}}{10}=\frac{\sqrt{95}}{5}$$

12. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0\ \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0$,
$\therefore\ a^2=1$

13. 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-9)^2+y^2=9$ 의 공통외접선의 길이를 l 이라 하고 공통내접선의 길이를 m 이라 할 때, l^2-m^2 의 값은?

① 48 ② −48 ③ 32 ④ −32 ⑤ 30

해설

중심이 (0, 0) (9, 0) 이므로
중심간의 거리는 9이다.
$\therefore\ l^2=9^2-1^2$

$\therefore\ m^2=9^2-7^2$
$\therefore\ l^2-m^2=(9^2-1^2)-(9^2-7^2)$
$=-1^2+7^2=48$

14. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 접하도록 하는 a의 값의 곱을 구하여라.

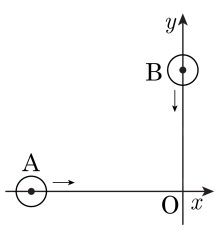
▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 3, 1이므로
접하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

15. 반지름이 1 인 두 원 A, B 가 현재 아래 그림의 위치에 있고, A 의 중심 $(-10,\ 0)$ 은 x 축 위를 왼쪽에서 오른쪽으로, B 의 중심 $(0,\ 8)$ 은 y 축 위를 위에서 아래로 매초 1 의 속도로 움직일 때, 원 A, B 가 최초로 접할 때와 두 번째 접할 때 각각의 시간은?



① $t = 2,\ 4$ ② $t = 4,\ 6$ ③ $t = 8,\ 10$

④ $t = 12,\ 14$ ⑤ $t = 16,\ 18$

해설

t 초 후 $\mathrm{A}(-10+t,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 8-t)$ 에 위치.
t 초 후의 두 원의 중심 사이의 거리를 d 라 하면
$d^2 = (8-t)^2 + (10-t)^2 = 2t^2 - 36t + 164$
접하는 경우는 두 원의 중심 사이의 거리가
두 원의 반지름의 합과 같을 때이므로,
$\sqrt{(8-t)^2 + (10-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 36t + 164} = 2$
$\therefore\ 2t^2 - 36t + 160 = 0$
$\therefore\ t^2 - 18t + 80 = 0$
$\therefore\ t = 8,\ 10$

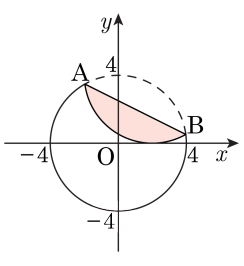
16. 두 원 $x^2+y^2-2y=0,\ x^2+y^2+2x-4=0$ 의 교점을 지나는 원의 넓이의 최솟값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

해설

두 원 $x^2+y^2-2y=0,\ x^2+y^2+2x-4=0$ 의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되는 경우는 그 원이 주어진 두 원의 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원일 때이다.
이 때, 주어진 두 원의 공통현의 방정식은
$x^2+y^2-2y-\left(x^2+y^2+2x-4\right)=0$
$-2y-2x+4=0$
$\therefore y=-x+2\cdots\cdots$ ㉠
두 원의 교점은 공통현 ㉠과 원 $x^2+y^2-2y=0$ 의 교점과 같으므로 ㉠을 $x^2+y^2-2y=0$ 에 대입하면
$x^2+(-x+2)^2-2(-x+2)=0$
$2x^2-2x=0,$
$2x(x-1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=1$
따라서, 두 교점은 $(0,2),(1,1)$ 이고, 이 두 점이 넓이가 최소인 원의 지름의 양 끝점이므로 이 원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
그러므로 구하는 원의 넓이의 최솟값은
$\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$

17. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 을 현 AB 를 접는 선으로 하여 접었을 때, 호 AB 가 x 축과 점 $(2,\ 0)$ 에서 접한다. 이 때, 직선 AB 의 방정식을 구하여라.



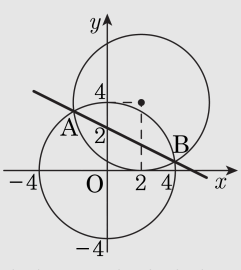
① $x+2y-4=0$ ② $x+2y-5=0$

③ $2x+y-6=0$ ④ $2x+y-5=0$

⑤ $2x+y-4=0$

해설

다음 그림과 같이 호 AB 를 일부분으로 하는 원을 그리면, 새로운 원은 반지름의 길이가 4 이고,
x 축과 점 $(2,\ 0)$ 에서 접하므로
중심의 좌표가 $(2,\ 4)$ 가 된다.
즉, 새로운 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-4)^2=16$



이 때, 선분 AB 는 두 원의 공통현이므로 직선 AB 의 방정식은
$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$
$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2-4x-8y+4)=0$
$4x+8y-20=0$
$\therefore\ x+2y-5=0$

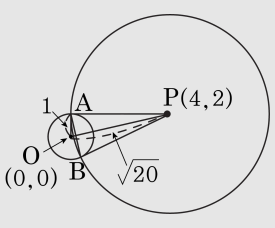
18. 점 $(4,\ 2)$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선의 접점을 A, B 라 할 때 직선 $\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면?

① $4x+y=1$ ② $2x+y=1$ ③ $4x+2y=1$

④ $2x-y=1$ ⑤ $4x-y=1$

해설

$\overline{AB}$ 는 원 $x^2+y^2=1$ 와 중심이 P(4, 2) 이고 반지름이 $\overline{PA}$ 인 원의 공통현이다. 다음 그림에서 $\overline{PA}=\sqrt{19}$ 이므로



원 P 의 식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=19$

$x^2+y^2=1\cdots①$

$(x-4)^2+(y-2)^2=19\cdots②$

공통현 $\overline{AB}$ 의 식은 ① − ② 하면

$8x+4y=2,\ \therefore\ 4x+2y=1$

해설

점 P(4, 2) 에서 원의 중심 O 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

또한 직선 $\overline{AB}$ 는 $\overline{OP}$ 에 수직이므로 직선 $\overline{AB}$ 의 기울기는 -2 이다.

따라서 직선 $\overline{AB}$ 의 방정식은 $y=-2x+b$ 라 하고, A 의 좌표를 $(m,\ n)$ 이라 하면

$n=-2m+b\ \rightarrow\ n+2m=b\cdots①$

또한, 접선의 방정식은 $mx+ny=1$ 이고 $(4,\ 2)$ 를 지나므로

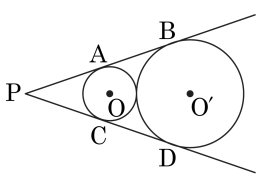
$4m+2n=1\cdots②$

①, ② 에서 $b=\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore$ $\overline{AB}$ 의 직선의 방정식은

$y=-2x+\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 4x+2y=1$

19. 다음 그림과 같이 외접하는 두 원 O, O′ 의 공통외접선의 교점을 P , 접점을 A, B, C, D 라고 하자. $\overline{PA} = \overline{AB} = 4\,\text{cm}$ 일 때, 원 O 의 넓이를 구하면?



① $\pi\,\text{cm}^2$ ② $2\pi\,\text{cm}^2$ ③ $3\pi\,\text{cm}^2$

④ $4\pi\,\text{cm}^2$ ⑤ $5\pi\,\text{cm}^2$

해설

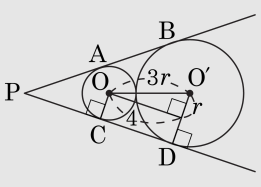
$\triangle POA$ 와 $\triangle PO'B$ 는 닮음이고 닮음비는 1 : 2 이다.

$\therefore$ $\overline{OA} = r$ 이라 하면, $\overline{O'B} = 2r$

다음 그림에서 $4^2 + r^2 = 9r^2$

$\Rightarrow$ $r = \sqrt{2}$

$\therefore$ 원 O 의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$



20. 두 원 $x^2+y^2-2x+2my+m^2-7=0$, $x^2+y^2-2mx+2y+m^2-9=0$ 가 직교할 때 m 값을 구하면?

① $-4,\ 2$　② $-4,-2$　③ $4,-2$

④ $2,\ \sqrt{2}$　⑤ $-2,\ \sqrt{2}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로

$(x-1)^2+(y+m)^2=8$

$(x-m)^2+(y+1)^2=10$

두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로

$(m-1)^2+(m-1)^2=18,\ (m-1)^2=9,\ m-1=\pm 3$

$m=4,-2$