1. 세 점 $\mathrm{P}(-1,4), \mathrm{Q}(3,6), \mathrm{R}(0,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle \mathrm{PQR}$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2+y^2-x-2y-3=0$

② $x^2+y^2+2x-1y-10=0$

③ $x^2+y^2-4x-5y-8=0$

④ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

⑤ $x^2+y^2-6x-5y-20=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 $\mathrm{P}(-1,4), \mathrm{Q}(3,6), \mathrm{R}(0,-3)$ 을
지나므로 차례로 대입하면

$1+16-A+4B+C=0 \quad \cdots$㉠

$9+36+3A+6B+C=0 \quad \cdots$㉡

$9-3B+C=0 \quad \cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$A=-6, B=-2, C=-15$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-2y-15=0$

2. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad\quad), k < (\quad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

3. 두 점 A $(-3,\ 8)$, B $(7,\ -4)$ 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

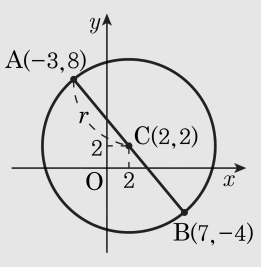
① $(x-1)^2+(y-1)^2=18$ ② $(x-2)^2+(y-2)^2=32$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=7$ ④ $(x-3)^2+(y-3)^2=22$

⑤ $(x-2)^2+(y-2)^2=61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면



C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$C\left(\frac{-3+7}{2},\ \frac{8-4}{2}\right)$

$\therefore C(2,2)$

반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(2+3)^2+(2-8)^2}=\sqrt{61}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=61$

4. 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p,q) 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2,4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$

5. 중심이 직선 $y = x+1$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 6),\ (-3,\ 2)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y = x+1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 $(a,\ b)$ 이므로 $b = a+1$
따라서 $(a,\ a+1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1,\ 6),\ (-3,\ 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$\sqrt{(a-1)^2+(a+1-6)^2}$
$= \sqrt{(a+3)^2+(a+1-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$(a-5)^2 = (a+3)^2$
$16a = 16$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ (a,\ b) = (1,\ 2)$
따라서 $a+b = 1+2 = 3$

6. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c=ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 표준형으로 나타내면

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이어야 한다.

(i) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|$ 에서 $|a|=|b|$

$\therefore a^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 의 양변을 제곱하면 $\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

$\therefore b^2=4c \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2=4c$

$\therefore c=\frac{1}{4}a^2$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

7. 원 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

①

②

③

④

⑤

해설

$x^2+y^2-2x+4y+3=0$

$\therefore$ 중심은 $(1,-2)$ 이고, 반지름은 $\sqrt{2}$

8. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5) 와 B(8, 1) 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$

이 원이 두 점 A(0, 5), B(8, 1) 을 지나므로

$a^2 - 10b + 25 = 0,\ a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$

두 식을 연립하면

$4a^2 - 80a + 300 = 0,\ 4(a-5)(a-15) = 0$

그런데

$0 \le a \le 8$ 이므로 $a = 5,\ b = 5$ 이다.

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$\therefore\ x + 2y - 10 = 0$

따라서 원의 중심 (5, 5) 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

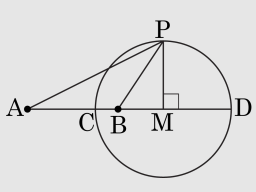
$$d = \frac{|5 + 2\cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

9. 두 점 $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(7,4)$ 에서 이르는 거리의 비가 $2:1$ 인 임의의 점 P 에 대하여 $\triangle \mathrm{ABP}$ 의 넓이가 최대일 때, $\tan(\angle \mathrm{PAB})$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

점 P 의 자취는 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점 C와 $2:1$ 로 외분하는 점 D 를 지름의 양 끝으로 하는 원이다.



점 C 의 좌표는

$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1}\right)$, 즉 $\mathrm{C}(5,3)$

점 D 의 좌표는

$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1}\right)$ 즉, $\mathrm{D}(13,7)$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$

즉, $\mathrm{M}(9,5)$ 이므로

$\overline{\mathrm{CM}} = \sqrt{(9-5)^2+(5-3)^2} = 2\sqrt{5}$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가 $(9,5)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 원이므로 자취의 방정식은

$(x-9)^2+(y-5)^2 = 20$

그런데 다음 그림에서 $\triangle \mathrm{ABP}$ 의 넓이가 최대인 경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

이 때, $\overline{\mathrm{AM}} = \sqrt{(9-1)^2+(5-1)^2} = 4\sqrt{5}$,

$\overline{\mathrm{PM}} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$\tan(\angle \mathrm{PAB}) = \tan(\angle \mathrm{PAM}) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

10. 점 A(6, 0) 과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P 를 이은 선분 AP 의 중점의 자취의 길이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

원 위의 점을 $P(a,\ b)$,
선분 AP 의 중점을 $M(x,\ y)$ 라 하면,
$x=\dfrac{6+a}{2},\ y=\dfrac{b}{2}$
$\therefore\ a=2(x-3),\ b=2y\ \cdots$ ㉠
이 때, 점 $P(a,\ b)$ 가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$4(x-3)^2+4y^2=4$
$\therefore\ (x-3)^2+y^2=1$
따라서 선분 AP 의 중점 M 은 중심이 (3, 0) 이고,
반지름의 길이가 1 인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 길이는
$\therefore\ 2\pi\cdot 1=2\pi$