

1. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

주어진 조건에서,

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$$

$$= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$$

$$= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$$

$$18x + 18y - 54 = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$$

2. 점 A(6, 2)와 직선 $x + 2y - 2 = 0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

- ① $x - 2y - 8 = 0$ ② $x + 2y - 8 = 0$ ③ $x - 2y + 8 = 0$
④ $x + 2y + 8 = 0$ ⑤ $x - 2y = 0$

해설

P (a , b)라 하면 $a + 2b - 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$\overline{AP}$ 의 1 : 3 내분점을 Q (x , y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a+18}{1+3}, \frac{b+6}{1+3} \right)$$

$$x = \frac{a+18}{1+3}, y = \frac{b+6}{1+3}$$

$$a = 4x - 18, b = 4y - 6$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$4x - 18 + 2(4y - 6) - 2 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

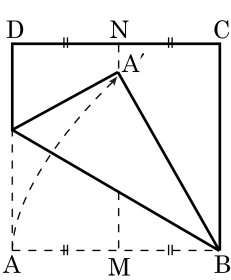
3. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1 또는 2
- ③ 4
- ④ -2 또는 4
- ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로 나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면 $(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots \textcircled{1}$ 원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로
$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$
 양변에 제곱하여 정리하면 $(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2, k^2=4$ $\therefore k=\pm 2$ 이것을 ①에 대입하여 정리하면 $3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$ 따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

4. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 모양의 종이를 꼭지점 A 가 선분 MN 위에 놓이도록 접었을 때, 점 A 가 선분 MN 과 만나는 점을 A' 이라 하자. 이 때, 점 A 와 직선 A'B 사이의 거리는? (단, M 은 선분 AB 의 중점, N 은 선분 CD 의 중점이다.)



- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

정사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 놓자.
 점 M 을 원점으로 하고 직선 AB 를 x 축 위에 잡으면

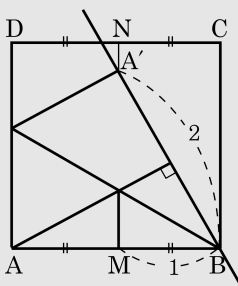
$$\overline{AM} = \overline{MB} = 1 \text{ 이므로}$$

$$A(-1, 0), B(1, 0)$$

$$\overline{A'B} = \overline{AB} = 2, A'(0, \sqrt{3}) \text{ 이다.}$$

직선 A'B 의 방정식은 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$ 이므로,
 점 A 에서 직선 A'B 사이의 거리는

$$\frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$$



5. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x - 3y + 2 = 0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

- i. l 과 l' 은 만나지 않는다.

ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l, l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $AB = \sqrt{13}$ 이다.

iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

- ① $2x - 3y + 15 = 0$

② $2x - 3y - 13 = 0$

③ $2x - 3y - 11 = 0$

④ $3x + 2y + 11 = 0$

⑤ $3x + 2y + 13 = 0$

해설

- i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
 $l' : 2x - 3y + c = 0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $AB = \sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1, 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.
즉, $\frac{|-2 + c|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}, |-2 + c| = 13$
 $-2 + c = \pm 13 \quad \therefore c = 15$ 또는 $c = -11$
 $\therefore l' : 2x - 3y + 15 = 0$ 또는 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

iii. l' 의 y 절편 $5, -\frac{11}{3}$ 중에서
 l 의 y 절편 $\frac{2}{3}$ 보다 작은 것은
 $-\frac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선
 l' 의 방정식은 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

6. 방정식 $15x^2 - 6xy - 10x + 4y = 0$ 은 두 직선을 나타낸다. 이 두 직선의 교점을 지나는 직선 중에서 원점으로부터의 거리가 최대인 것은?
- ① $3x - 2 = 0$ ② $x + 3 = 0$
- ③ $5x - 2y = 0$ ④ $4x - 3y + 6 = 0$
- ⑤ $6x + 15y - 29 = 0$

해설

준 식을 인수분해하면, $(3x-2)(5x-2y) = 0$ $3x-2 = 0$, $5x-2y = 0$

이므로 이 두 직선의 교점은 $A\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 이다.

이 두 직선의 교점을 지나는 직선과 원점 사이의 거리가 최대일 때는

교점 $A\left(\frac{2}{5}, \frac{5}{5}\right)$ 가 원점에서 직선에 내린 수선의 발일 때이므로

교점 $A\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 가 원점에서 직선에 내린 수선의 발일 때이므로

$$(\overline{OA} \text{ 의 기울기}) = \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - \frac{5}{3} = -\frac{2}{5} \left(x - \frac{2}{3} \right)$$

$$\therefore 6x + 15y - 29 = 0$$

7. $\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 각각 $P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 1)$ 이라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

- ① 18
- ② 24
- ③ 30
- ④ 32
- ⑤ 36

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 로 놓으면
 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점은 각각
 $P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6, 1)$ 이므로
이것을 풀면, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 7$
 $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = -4$
 $\therefore \triangle ABC =$
 $\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
 $= \frac{1}{2}|5(2 - (-4)) + 1((-4) - 6) + 7(6 - 2)|$
 $= 24$

해설

$\triangle ABC$ 의 넓이는 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의
중점을 이어 만든 $\triangle PQR$ 의 넓이의
4배임을 이용한다.

8. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x - y + 2 = 0, l_2 : x + y - 14 = 0, l_3 : 7x - y - 10 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a, b) , 반지름이 r 일 때, $a + b + r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

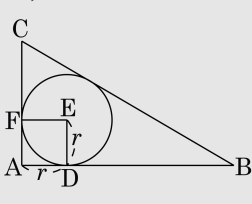
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연결하여 세 점의 좌표를 구한다.

$$A = (6, 8) \quad B = (2, 4) \quad C = (3, 11)$$

$$\overline{AB} = 4\sqrt{2}, \overline{BC} = 5\sqrt{2}, \overline{CA} = 3\sqrt{2}$$

즉, $\angle CAB = 90^\circ$ 인 직각 삼각형이다.



$$\Rightarrow 3\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 5\sqrt{2} \therefore r = \sqrt{2}$$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{AB}$ 의 1 : 3 의 내분점이므로,

$$D = \left(\frac{2+18}{4}, \frac{4+24}{4} \right) = (5, 7)$$

점 F 는 $\overline{AC}$ 의 1 : 2 의 내분점이므로,

$$F = \left(\frac{3+12}{3}, \frac{11+16}{3} \right) = (5, 9)$$

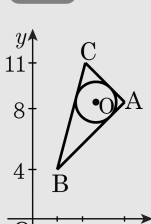
$\square ADEF$ 는 정사각형이므로 $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1 , y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로의 이동도 마찬가지이다.

$$\therefore E = (5-1, 7+1) = (4, 8) \Rightarrow a+b+r^2 = 4+8+(\sqrt{2})^2 = 14$$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 A(6, 8), B(2, 4), C(3, 11)

원의 중심의 좌표 O(a, b) 이므로

$$2 < a < 6, 4 < b < 11 \dots \textcircled{1}$$

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}} = \frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}} = r \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $\textcircled{1}$ 의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는

$a = 4, b = 8$ 이고

$$\text{다시 } \textcircled{2} \text{에 대입하면, } r = \sqrt{2}, \therefore a+b+r^2 = 14$$