1. 세 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ -3)$, C$(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면

주어진 조건에서,

$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$

$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$

$2x^2-2x+2y^2+6y+14$

$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$

$18x+18y-54=0$

$\Rightarrow\quad x+y-3=0$

$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

2. 점 A$(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$　② $x+2y-8=0$　③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$　⑤ $x-2y=0$

해설

P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0$ ⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 $1:3$ 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면

$$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$$

$$x=\frac{a+18}{1+3},\ y=\frac{b+6}{1+3}$$

$a=4x-18$, $b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

3. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -1 또는 2 ③ 4

④ -2 또는 4 ⑤ 0 또는 4

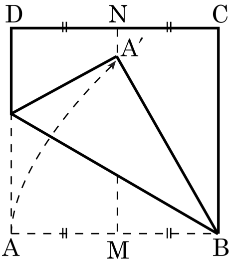
해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로
나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면
$(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots$ ①
원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$

양변에 제곱하여 정리하면
$(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2$, $k^2=4$
$\therefore k=\pm 2$
이것을 ①에 대입하여 정리하면
$3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$
따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

4. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 모양의 종이를 꼭지점 A 가 선분 MN 위에 놓이도록 접었을 때, 점 A 가 선분 MN 과 만나는 점을 A′ 이라 하자. 이 때, 점 A 와 직선 A′B 사이의 거리는? (단, M 은 선분 AB 의 중점, N 은선분 CD 의 중점이다.)



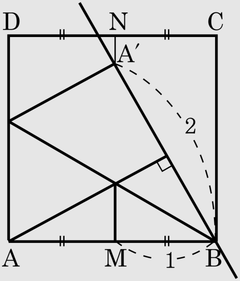
① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{3}$

④ 2 ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

정사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 놓자.
점 M 을 원점으로 하고 직선 AB 를 x 축 위에 잡으면
$\overline{AM}=\overline{MB}=1$ 이므로
$A(-1,\ 0),\ B(1,\ 0)$
$\overline{A'B}=\overline{AB}=2$, $A'(0,\ \sqrt{3})$ 이다.
직선 A′B 의 방정식은 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$
이므로,
점 A 에서 직선 A′B 사이의 거리는

$$\frac{\left|-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\sqrt{3}$$



5. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x - 3y + 2 = 0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

i. l 과 l' 은 만나지 않는다.
ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l , l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$ 이다.
iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

① $2x - 3y + 15 = 0$
② $2x - 3y - 13 = 0$
③ $2x - 3y - 11 = 0$
④ $3x + 2y + 11 = 0$
⑤ $3x + 2y + 13 = 0$

해설

i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
$l' : 2x - 3y + c = 0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1,\ 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.

즉, $\dfrac{|-2+c|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \sqrt{13}$, $|-2+c| = 13$

$-2 + c = \pm 13 \quad \therefore\ c = 15$ 또는 $c = -11$

$\therefore\ l' : 2x - 3y + 15 = 0$ 또는 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

iii. l' 의 y 절편 $5,\ -\dfrac{11}{3}$ 중에서
l 의 y 절편 $\dfrac{2}{3}$ 보다 작은 것은
$-\dfrac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선
l' 의 방정식은 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

6. 방정식 $15x^2-6xy-10x+4y=0$ 은 두 직선을 나타낸다. 이 두 직선의 교점을 지나는 직선 중에서 원점으로부터의 거리가 최대인 것은?

① $3x-2=0$ ② $x+3=0$

③ $5x-2y=0$ ④ $4x-3y+6=0$

⑤ $6x+15y-29=0$

해설

준 식을 인수분해하면,$(3x-2)(5x-2y)=0$ $3x-2=0,\ 5x-2y=0$

이므로 이 두 직선의 교점은 $A\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ 이다.

이 두 직선의 교점을 지나는 직선과 원점 사이의 거리가 최대일 때는

교점 $A\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ 가 원점에서 직선에 내린 수선의 발일 때이므로

$(\overline{OA}$ 의 기울기$)=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-\frac{5}{3}=-\frac{2}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$\therefore\quad 6x+15y-29=0$

7. $\triangle ABC$ 의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 각각 $P(3,\ 4)$, $Q(4,\ -1)$, $R(6,\ 1)$ 이라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 18 ② 24 ③ 30 ④ 32 ⑤ 36

해설

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ 로 놓으면
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점은 각각
$P(3, 4)$, $Q(4, -1)$, $R(6,\ 1)$ 이므로
이것을 풀면, $x_1 = 5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 7$
$y_1 = 6,\ y_2 = 2,\ y_3 = -4$
$\therefore \triangle ABC =$
$\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
$= \frac{1}{2}|5(2 + 4) + (-4 - 6) + 7(6 - 2)|$
$= 24$

해설

$\triangle ABC$ 의 넓이는 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의
중점을 이어 만든 $\triangle PQR$ 의 넓이의
4 배임을 이용한다.

8. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x - y + 2 = 0$, $l_2 : x + y - 14 = 0$, $l_3 : 7x - y - 10 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a, b), 반지름이 r 일 때, $a + b + r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

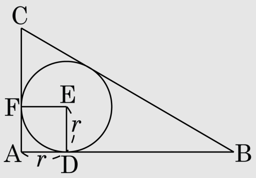
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연립하여 세 점의 좌표를 구한다.

$A = (6, 8)$ $B = (2, 4)$ $C = (3, 11)$

$\overline{AB} = 4\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 5\sqrt{2}$, $\overline{CA} = 3\sqrt{2}$

즉, $\angle CAB = 90°$ 인 직각 삼각형이다.



$\Rightarrow$ $3\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 5\sqrt{2}$ $\therefore$ $r = \sqrt{2}$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{AB}$ 의 $1 : 3$ 의 내분점이므로,

$$D = \left(\frac{2 + 18}{4}, \frac{4 + 24}{4}\right) = (5, 7)$$

점 F 는 $\overline{AC}$ 의 $1 : 2$ 의 내분점이므로,

$$F = \left(\frac{3 + 12}{3}, \frac{11 + 16}{3}\right) = (5, 9)$$

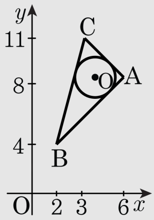
□ADEF 는 정사각형이므로 $\overline{AF} // \overline{DE}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1, y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로 의 이동도 마찬가지이다.

$\therefore$ $E = (5-1, 7+1) = (4, 8) \Rightarrow$ $a+b+r^2 = 4+8+(\sqrt{2})^2 = 14$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 $A(6, 8)$, $B(2, 4)$, $C(3, 11)$

원의 중심의 좌표 $O(a, b)$ 이므로

$2 < a < 6$, $4 < b < 11 \cdots$ ㉠

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|a + b - 14|}{\sqrt{2}} = \frac{|7a - b - 10|}{5\sqrt{2}} = r \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 ㉠의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는 $a = 4$, $b = 8$ 이고

다시 ㉡에 대입하면, $r = \sqrt{2}$, $\therefore$ $a + b + r^2 = 14$