1. $\dfrac{3+4i}{1+3i}$ 를 $a+bi$ 의 꼴로 나타 낼 때, $a-b$ 의 값은? (단, a , b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

분모의 실수화를 해준다.

$\dfrac{3+4i}{1+3i}=\dfrac{(3+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$\therefore a-b=2$

2. 방정식 $\frac{x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2x+1}{4}$ 의 해를 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

양변에 12를 곱하면 $4(x+2)-6=3(2x+1)$

이항하여 정리하면 $4x-6x=3-8+6$, $-2x=1$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

3. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두근의 합 : 3, 두근의 곱 : 1

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$= 7$

4. x, y가 실수일 때, $(1+i)x+(1-i)y=\dfrac{2-i}{1+i}$을 만족하는 x, y의 값은?

① $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=1$　② $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$　③ $x=1$, $y=-\dfrac{1}{2}$
④ $x=1$, $y=1$　⑤ $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$

해설

$(x+y)+(x-y)i=\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

$\Rightarrow\ x+y=\dfrac{1}{2},\quad x-y=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\ x=-\dfrac{1}{2},\quad y=1$

5. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5, 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$

$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고

꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로

$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,

$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$

$\therefore a + b = 3$

6. 사차방정식 $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$ 에서
$x=1$, $x=-1$을 대입하면 성립하므로
$x^4+x^3-7x^2-x+6$
$=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-3,\ -1,\ 1,\ 2$
따라서 최대의 근은 2

7. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \ \cdots \ ㉠ \\ x - y = 1 \ \cdots \ ㉡ \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여
㉠에 대입하면
$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$
$2x = 3$
$\therefore \ x = \frac{3}{2}, \ y = \frac{1}{2}$

8. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$ ② $-7<x<-5$

③ $-7<x<5$ ④ $5<x<7$

⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로

$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$

$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$

$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ ㈎

㈎를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면

$-4x^2-48x-140<0$

$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

9. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉣　③ ㉡, ㉢　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \dfrac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

10. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, $a,\ b$가 정수일 때, 순서쌍 (a,b)의 갯수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$

$a^2+6a+1+4b^2=0$

$\Rightarrow\quad (a+3)^2+(2b)^2=8$

a,b가 정수이므로

$a+3=\pm2,\quad 2b=\pm2$

$\therefore\quad a=-1,\ -5,\quad b=1,-1$

가능한 순서쌍 (a,b)의 갯수 : 4개

11. 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 a, b라 할 때, a^2+b^2와 ab를 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-8x+12=0$
② $x^2-7x+12=0$
③ $x^2+7x+12=0$
④ $x^2+5x+4=0$
⑤ $x^2-5x+4=0$

해설

$x^2-3x+4=0$의 두 근이 a, b라면
$a+b=3,\ ab=4$
$$\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-8=1 \\ ab=4 \end{cases}$$
1, 4를 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-5x+4=0$

12. 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$일 때, $x+y$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5$
$=x^2-2(2y-1)x+4y^2-4y+1+y^2-4y+4$
$=x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2+(y-2)^2$
$=(x-2y+1)^2+(y-2)^2=0$
$\therefore\ x-2y+1=0,\ y-2=0$이므로
$y=2,\ x-4+1=0\quad \therefore\ x=3$
따라서 $x+y=3+2=5$

13. $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 를 동시에 만족하는 (x, y) 가 없도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $4 - 2\sqrt{2} \le m \le 4 + 2\sqrt{2}$

② $4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$

③ $2 - 2\sqrt{3} < m < 2 + 2\sqrt{3}$

④ $m \le 4 - 2\sqrt{2}$ 또는 $m \ge 4 + 2\sqrt{2}$

⑤ $m < 4 - 2\sqrt{3}$또는 $m > 4 + 2\sqrt{3}$

해설

두 함수 $y = x^2 + (m-1)x + m,\ y = x$의 그래프는 교점이 없어야 한다.

$x^2 + (m-1)x + m = x,$

$x^2 + (m-2)x + m = 0$에서

$D = (m-2)^2 - 4m < 0$

$m^2 - 8m + 4 < 0$

$\therefore 4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$

14. 임의의 실수 x에 대하여 $\sqrt{ax^2+ax+b}$가 실수일 때, 계수 a, b가 만족하는 조건을 구하면?

① $0 \le a \le 4b$　② $0 < a \le 4b$　③ $0 \le a < 4b$

④ $0 < a < 4b$　⑤ $0 < a < 4b$

해설

모든 실수 x에 대하여
$ax^2+ax+b \ge 0$을 만족해야 하므로
ⅰ) $a=0$일 때, $b \ge 0 \cdots$ ①
ⅱ) $a>0$일 때,
$D=a^2-4ab \le 0$
$a-4b \le 0 \cdots$ ②
①, ②에서 $0 \le a \le 4b$

15. 이차방정식 $x^2 + (a-b)x + ab = 1$이 a의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$　　② $b \le -\frac{\sqrt{2}}{2},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{3}$　　④ $b \le -\frac{\sqrt{2}}{3},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ $b \le -2,\ b \ge 2$

해설

$x^2 + (a-b)x + ab - 1 = 0$에서

$D = (a-b)^2 - 4(ab-1) \ge 0$

이 식을 a에 관해서 정리하면, $a^2 - 6ba + b^2 + 4 \ge 0$이

부등식이 a에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \le 0$

이므로

$\frac{D'}{4} = (3b)^2 - (b^2+4) \le 0$

$\therefore\ 2b^2 - 1 \le 0$에서

$(\sqrt{2}b+1)(\sqrt{2}b-1) \le 0$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le b \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$