

1. 16의 네제곱근 중 실수인 것의 곱을 P , 27의 세제곱근 중 허수인 것의 합을 Q 라 할 때, $P \times Q$ 의 값은?

① -36

② -12

③ 4

④ 12

⑤ 36

해설

$x^4 = 16, x^3 = -27$ 을 만족하는 x 를 구한다.

16의 네제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[4]{16} = 2, -\sqrt[4]{16} = -2$$

$$\therefore P = -4$$

-27의 세제곱근을 X 라 하면

$$x^3 = -27, (x+3) + (x^2 - 3x + 9) = 0$$

이때, -27의 세제곱근 중 허수인 것의 합은 방정식 $x^2 - 3x + 9 = 0$ 의 두근의 합과 같다.

$$\therefore Q = 3$$

$$\therefore P \times Q = -12$$

2. $x > 0, x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x \sqrt{x^3}} = \sqrt[8]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x \sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2} \sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

3. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 5$$

4. $A = \frac{\log_2(\log_2 3)}{\log_2 3}$ 일 때, 3^A 의 값은?

① 1

② 2

③ $\log_3 2$

④ $\log_2 3$

⑤ $3^{\log_2 3}$

해설

$$A = \frac{\log_2(\log_2 3)}{\log_2 3} = \log_3(\log_2 3)$$

$$3^A = 3^{\log_3(\log_2 3)} = \log_2 3$$

$$\therefore 3^A = \log_2 3$$

5. 다음 중 세 수 $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$ 을 작은 수부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$

② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$

③ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$

⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$

해설

거듭제곱의 성질을 이용하여 $\sqrt[12]{N}$ 의 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^3}$$

$$\sqrt[6]{30} = \sqrt[12]{30^2}$$

그런데

$$\frac{6^4}{10^3} = \frac{(2 \times 3)^4}{(2 \times 5)^3} = \frac{2 \times 3^4}{5^3} > 1,$$

$$\frac{10^3}{30^2} = \frac{10}{9} > 1 \text{ 이므로}$$

$$6^4 > 10^3 > 30^2$$

따라서 작은 수부터 나열하면

$$\sqrt[6]{30}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}$$

6. 2 이상의 서로 다른 두 자연수 m, n 에 대하여
 $\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10$ 을 만족할 때, 두 자연수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10^{\frac{2}{m}} \times 10^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{2}{m} + \frac{1}{n}} = 10$$

$$\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

$$2n + m = mn, (m-2)(n-1) = 2$$

m, n 은 $m \geq 2, n \geq 2$ 인 서로 다른 자연수이므로

$$m-2 \geq 0, n-1 \geq 1$$

$$\therefore m-2 = 2, n-1 = 1$$

$$\therefore m = 4, n = 2 \quad \therefore m+n = 6$$

7. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

해설

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}} \text{ 이 자연수}$$

$$n = -1 \text{ 일 때, } 3^3$$

$$n = -3 \text{ 일 때, } 3$$

$\Rightarrow 2$ 개

8. $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} \right)^3$ 을 계산하면?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

$(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1 = 2$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} - 1$$

$(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 + 1 = 4$ 이므로

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} \right)^3 \\ = (\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)^3 = (2 \cdot \sqrt[3]{3})^3 = 24 \end{aligned}$$

9. 실수 x, y 에 대하여 $57^x = 27$, $513^y = 81$ 일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ 의 값은?

㉠ -2

㉡ -1

㉢ 0

㉣ 1

㉤ 2

해설

$$57^x = 27 = 3^3 \text{ 에서 } 57 = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \dots \textcircled{㉠}$$

$$513^y = 81 = 3^4 \text{ 에서 } 513 = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \dots \textcircled{㉡}$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

10. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$400 = 2^4 \cdot 5^2 \text{ 이므로}$$

$$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$$

$$\text{따라서, } a = 4c, b = 2c$$

a, b, c 의 최대공약수가 3이므로

$$c = 3, a = 12, b = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$$

11. $a = \log_4(3 - \sqrt{8})$ 일 때, $2^a + 2^{-a}$ 의 값은?

① $2\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2} + 1$

③ $2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{3} + 1$

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

로그의 정의에 의하여

$$4^a = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2a} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{2} - 1$$

$$2^{-a} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-a} = \sqrt{2} + 1$$

$$2^a + 2^{-a} = 2\sqrt{2}$$

12. $\log_a(-a^2 + 5a + 6)$ 의 값이 존재하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\log_a(-a^2 + 5a + 6)$ 의 값이 존재하기 위해서는

(i) 밑 조건에 의하여

$$a > 0, a \neq 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

(ii) 진수 조건에 의하여

$$-a^2 + 5a + 6 > 0, a^2 - 5a - 6 < 0$$

$$(a + 1)(a - 6) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 6 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉠, ㉡을 만족하는 정수는 2, 3, 4, 5의 4개다.

13. 모든 실수 x 에 대하여 $\log_4 \{x^2 - (a-1)x + 4\}$ 의 값이 존재하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-3 < a < 5$

② $-3 \leq a \leq 5$

③ $-1 < a < 1$

④ $1 < a < 3$

⑤ $3 \leq a \leq 5$

해설

진수의 조건에서 $x^2 - (a-1)x + 4 > 0$

방정식 $x^2 - (a-1)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-1)^2 - 16 < 0$$

$$a^2 - 2a - 15 < 0$$

$$(a+3)(a-5) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 5$$

14. $x = \sqrt{7 + \sqrt{33}}$, $y = \sqrt{7 - \sqrt{33}}$ 일 때, $\log_2 x + \log_2 y$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_2 y &= \log_2 xy \\ &= \log_2 \sqrt{7 + \sqrt{33}} \sqrt{7 - \sqrt{33}} \\ &= \log_2 \sqrt{49 - 33} = \log_2 \sqrt{16} \\ &= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\end{aligned}$$

15. $\log_5 250 = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$) 라고 할 때, $n \times 25^\alpha$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$125 < 250 < 625$ 이므로

$$\log_5 5^3 < \log_5 250 < \log_5 5^4$$

$\log_5 250$ 의 정수부분은 $n = 3$ 이고

$$\text{소수부분은 } \alpha = \log_5 250 - \log_5 125 = \log_5 \frac{250}{125} = \log_5 2$$

따라서 $25^\alpha = 25^{\log_5 2} = 4$ 이므로 25^α 의 값과 정수부분 n 의 곱은 $3 \times 4 = 12$ 이다.

16. $m = \log_a \alpha$, $n = \log_a \beta$ 일 때, $a^{\frac{m-n}{2}}$ 을 α , β 에 관한 식으로 나타내면?
(단, $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$)

① $\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{2}}$

② $\frac{\alpha - \beta}{2}$

③ $\alpha^2 - \beta^2$

④ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

⑤ $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

해설

$m = \log_a \alpha$, $n = \log_a \beta$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$a^m = \alpha, a^n = \beta$$

$$\therefore a^{\frac{m-n}{2}} = \sqrt{a^{m-n}} = \sqrt{\frac{a^m}{a^n}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

17. 1보다 큰 정수 a, b, c 에 대하여 $p = a^{12} = b^4 = (abc)^2$ 일 때, $\log_c p$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ 3

④ 6

⑤ 9

해설

$$\text{주어진 식에서 } \log_p a = \frac{1}{12}, \log_p b = \frac{1}{4}, \log_p abc = \frac{1}{2}$$

$$\log_c p = x \text{라 하면 } \log_p c = \frac{1}{x} \text{이고,}$$

$$\log_p abc = \log_p a + \log_p b + \log_p c \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x}, \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = 6$$

$$\therefore \log_c p = 6$$

18. $A = (\log_3 9)(\log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3})$, $B = (\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 5)(\log_5 64 + \log_{25} 8)$
일 때, AB 의 값은?

① $\frac{37}{4}$

② $\frac{74}{5}$

③ $\frac{49}{3}$

④ 67

⑤ 75

해설

$$A = (\log_3 9)(\log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3})$$

$$= (\log_3 3^3)(\log_4 3^3 + \log_{2^{-1}} 3^{-1})$$

$$= (2 \log_3 3^3)(\frac{2}{2} \log_2 3 + \frac{-1}{-1} \log_2 3)$$

$$= 2(\log_2 3 + \log_2 3) = 2 \cdot \log_2 3 = 4 \log_2 3$$

$$B = (\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 5)(\log_5 64 + \log_{25} 8)$$

$$= (\log_{3^{\frac{1}{2}}} 5 + \log_{3^2} 5)(\log_5 2^6 + \log_{5^2} 2^3)$$

$$= (2 \log_3 5 + \frac{1}{2} \log_3 5)(6 \log_5 2 + \frac{3}{2} \log_5 2)$$

$$= \frac{5}{2} \log_3 5 \cdot \frac{15}{2} \log_5 2$$

$$= \frac{75}{4} \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$$

$$= \frac{75}{4} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5}$$

$$= \frac{75}{4} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{75}{4} \log_3 2$$

$$\therefore AB = 4 \log_2 3 \cdot \frac{75}{4} \log_3 2$$

$$= 4 \cdot \frac{75}{4} \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 75$$

19. $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

로그의 성질을 이용하여 주어진 식 $2\log(a-2b) = \log 2b + \log(62b-a)$ 을 간단히 정리하면

$$\log(a-2b)^2 = \log 2b(62b-a)$$

$$(a-2b)^2 = 2b(62b-a)$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = 124b^2 - 2ab$$

$$a^2 - 2ab - 120b^2 = 0$$

$$(a+10b)(a-12b) = 0$$

$$\therefore a = -10b \text{ 또는 } a = 12b$$

이때 진수 조건에 의하여 $a-2b > 0$, $2b > 0$, $62b-a > 0$ 이므로
 $a > 0$, $b > 0$

따라서 $a = 12b$ 이고 $\frac{a}{b} = 12$ 이다.

20. 등식 $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_3(\log_4(\log_2 y)) = \log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0$
이 성립할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 58

② 64

③ 75

④ 89

⑤ 93

해설

$$\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0 \text{ 에서 } \log_3(\log_4 x) = 1$$

$$\log_4 x = 3 \therefore x = 4^3 = 64$$

$$\log_3(\log_4(\log_2 y)) = 0 \text{ 에서 } \log_4(\log_2 y) = 1$$

$$\log_2 y = 4 \therefore y = 2^4 = 16$$

$$\log_4(\log_2(\log_3 z)) = 0 \text{ 에서 } \log_2(\log_3 z) = 1$$

$$\log_3 z = 2 \therefore z = 3^2 = 9$$

$$\therefore x + y + z = 64 + 16 + 9 = 89$$

21. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 2.25$ 의 값을 계산하면?

① 0.1661

② 0.1761

③ 0.1771

④ 0.3522

⑤ 0.5283

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 2.25 &= \log_{10} (3^2 \times 5^2 \div 100) \\ &= 2 \log 3 + 2(1 - \log 2) - 2 \\ &= 0.3522\end{aligned}$$

22. 다음 상용로그표를 이용하여 $\sqrt[6]{5}$ 의 값을 계산하면?

<상용로그표>

수	0	1	2	...	9	비례부분								
						1	2	3	4	5	6	7	8	9
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.2	.0792	.0828	.0864	...	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	...	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2.0	.3010	.3032	.3054	...	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	...	.3404	2	4	6	8	10	13	14	16	18

① 1.296

② 1.302

③ 1.308

④ 1.313

⑤ 1.321

해설

$$\log \sqrt[6]{5} = \frac{1}{6} \log 5 = \frac{1}{6} (1 - \log 2)$$

$$= \frac{1}{6} (1 - 0.3010) = 0.1165$$

상용로그표에서 비례부분을 이용하여 계산하면

$$\log 1.30 = 0.1139$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \begin{array}{l} 8 \leftarrow \\ \quad \quad \quad \end{array} \underline{\quad\quad\quad} 26$$

$$\log 1.308 = 0.1165$$

$$\therefore \sqrt[6]{5} = 1.308$$

23. $\log_2 x = 4.2$ 일 때, $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 ? (단, $\log 2 = 0.30$)

① 0.62

② 0.66

③ 0.70

④ 0.74

⑤ 0.78

해설

$$\log_2 x = 4.2 \text{ 이므로 } \frac{\log x}{\log 2} = 4.2, \log x = 1.26$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x = -1.26 = -2 + 0.74$$

$$\therefore \log \frac{1}{x} \text{ 의 소수 부분은 } 0.74$$

24. $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ 일 때, 12^{30} 은 몇 자리 수인가?

① 31

② 32

③ 33

④ 34

⑤ 35

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 12^{30} &= 30 \log(2^2 \times 3) \\ &= 30(2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 30(2 \times 0.3010 + 0.4771) \\ &= 32.3730 = 32 + 0.3730\end{aligned}$$

$\log_{10} 12^{30}$ 의 지표가 32이므로
 12^{30} 은 33자리 정수이다.

25. 상용로그 $\log A$ 의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $2x^2 + 3x + k = 0$ 의 두 근이고, 상용로그 $\log B$ 의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $3x^2 - 4kx - 3 = 0$ 의 두 근일 때, $\frac{A}{B}$ 의 값은? (단, k 는 상수)

① $10^{-\frac{5}{6}}$

② $10^{-\frac{1}{6}}$

③ $10^{\frac{5}{6}}$

④ $10^{\frac{7}{6}}$

⑤ $10^{\frac{11}{6}}$

해설

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면
 n 과 α 는 이차방정식 $2x^2 + 3x + k = 0$ 의 두 근이므로
 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = -\frac{3}{2}, \quad n\alpha = \frac{k}{2}$$

$$n + \alpha = -2 + \frac{1}{2} \text{ 이므로 } n = -2, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k = 2n\alpha = 2 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} = -2$$

따라서 이차방정식 $3x^2 + 8x - 3 = 0$ 에서

$$(x+3)(3x-1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \log B = -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore A = 10^{-\frac{3}{2}}, B = 10^{-\frac{8}{3}}$$

$$\therefore \frac{A}{B} = 10^{-\frac{3}{2} + \frac{8}{3}} = 10^{\frac{7}{6}}$$

26. 네 수 1, a , b , c 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$ 를 만족시킨다. 공비 r 의 값은? (단, $r > 1$)

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

$a = r$, $b = r^2$, $c = r^3$ 이므로

$$\log_8 c = \log_{2^3} r^3 = \log_2 r$$

$$\log_a b = \log_r r^2 = 2$$

따라서, $\log_8 c = \log_a b$ 에서

$$\log_2 r = 2$$

$$\therefore r = 2^2 = 4$$

27. 수소 이온 농도는 용액 1L 속에 존재하는 수소 이온의 그램이온수의 역수의 상용로그를 취하여 구하고, 기호 pH로 나타낸다.

즉, $\text{pH} = \log \frac{1}{[\text{H}^+]}$ ($[\text{H}^+]$ 는 수소 이온의 그램이온수) 이다. 두 용액 A, B의 수소 이온 농도가 각각 4, 6이고 수소 이온의 그램이온수가 각각 a , b 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① $\frac{1}{100}$

② $\frac{1}{10}$

③ 1

④ 10

⑤ 100

해설

$$4 = \log \frac{1}{a} \text{에서 } \frac{1}{a} = 10^4 \quad \therefore a = 10^{-4}$$

$$6 = \log \frac{1}{b} \text{에서 } \frac{1}{b} = 10^6 \quad \therefore b = 10^{-6}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^{-4-(-6)} = 10^2 = 100$$

28. 반지름의 길이가 r 인 구의 겉넓이 S 와 부피 V 는 다음과 같다.

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

다음 중 r 의 값에 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 것은?

- ① $\log S - \frac{1}{3} \log V$ ② $\log S - \frac{2}{3} \log V$ ③ $\log S - \log V$
 ④ $\log S - \frac{4}{3} \log V$ ⑤ $\log S - \frac{5}{3} \log V$

해설

$$\log S = \log 4\pi + 2 \log r \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log V = \log \frac{4}{3}\pi + 3 \log r \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} \times 3 - \textcircled{㉡} \times 2$ 에서

$$3 \log S - 2 \log V$$

$$= 3 \log 4\pi - 2 \log \frac{4}{3}\pi$$

$$= 3(\log S - \frac{2}{3} \log V) (\text{일정})$$

29. 어느 비행센터에서는 대기압을 $x(\text{mmHg})$, 외부온도를 $t(^{\circ}\text{C})$ 로 설정할 때, 비행기 운행에 적절한 고도 $h(\text{m})$ 는 다음과 같은 관계식으로 정해진다고 한다.

$$h = (30t + 8000) \log \frac{760}{x}$$

대기압을 15.2mmHg , 외부온도를 -30°C 로 설정할 때, 비행기 운행에 적절한 고도가 $a\text{m}$ 이다. 이때, a 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

① 11070

② 12070

③ 13070

④ 14070

⑤ 15070

해설

$h = a$, $t = -30$, $x = 15.2$ 이므로

$$a = \{30 \times (-30) + 8000\} \log \frac{760}{15.2}$$

$$= 7100 \log 50 = 7100(\log 100 - \log 2)$$

$$= 7100 \times 1.7 = 12070(\text{m})$$

30. 현주는 이번 달 휴대전화의 사용 요금으로 20,000 원을 납부하였다. 매월 사용 요금이 3%씩 증가한다고 할 때, 9개월 후에 현주가 납부할 휴대전화 사용 요금을 주어진 상용로그표를 이용하여 구하면?

<상용로그표>

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27

- ① 약 25,400 원 ② 약 25,560 원 ③ 약 26,080 원
 ④ 약 26,400 원 ⑤ 약 28,380 원

해설

1달 후 사용요금은 $20000(1 + 0.03)$

2달 후 사용요금은 $20000(1 + 0.03)^2$

⋮

9달 후 사용요금은 $20000(1 + 0.03)^9$

상용로그표에서 비례부분을 이용하여 계산하면

$$\log 1.30 = 0.1139$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \quad 4 \leftarrow \quad 13$$

$$\log 1.304 = 0.1152$$

$$\log 1.03^9 = 9 \log 1.03$$

$$= 0.1152$$

$$= \log 1.304$$

$$1.03^9 = 1.304 \text{ 이므로}$$

$$20000 \times 1.304 = 26080 (\text{원})$$

31. m, n 이 양의 정수이고 a 가 양수일 때, 다음 중 실수인 것은 모두 몇 개인가?

$$\sqrt[2m]{(-a)^{2n}}$$

$$\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n}}$$

$$\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n-1}}$$

$$\sqrt[2m]{(-a)^{2n-1}}$$

① 4개

② 3개

③ 2개

④ 1개

⑤ 없다.

해설

(i) $(-a)^{2n} > 0$ 이므로 실수

(ii) $(-2a)^{2n} > 0$ 이므로 실수

(iii) $(-a)^{2n-1} < 0$, $(2m-1)$ 은 홀수이므로 실수

(iv) $(-a)^{2n-1} < 0$, m 은 짝수이므로 실수가 아니다.

∴ 실수는 3개

32. $p = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$

$\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$ 에 대하여 $2 - p = 2^k$ 일 때, 실수 k 의 값은?

① -5

② -16

③ -30

④ -31

⑤ -32

해설

$$p = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$$

$\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$ 의 양변에 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ 을 곱하면

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)p$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{32}}$$

$$\frac{1}{2}p = 1 - \frac{1}{2^{32}}, p = 2 - \frac{1}{2^{31}}$$

$$2 - p = \frac{1}{2^{31}} = 2^{-31}$$

$$\therefore k = -31$$

33. $\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{1}{11}$ 일 때, $9^x + 9^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{61}{30}$

해설

$$\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{1}{11} = \frac{(3^x - 3^{-x})3^x}{(3^x + 3^{-x})3^x} = \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = \frac{9^x - 1}{9^x + 1} = \frac{1}{11}$$

$$11(9^x - 1) = 9^x + 1$$

$$10 \times 9^x = 12$$

$$9^x = \frac{6}{5}$$

$$\therefore 9^x + 9^{-x} = \frac{6}{5} + \frac{5}{6} = \frac{61}{30}$$

34. 2.4^n 의 정수부분이 네 자리가 되도록 하는 최소의 정수 n 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.48$ 로 계산한다.)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

2.4^n 의 정수부분이 4자리이므로 $\log 2.4^n$ 의 지표는 3이다.

$$3 \leq \log 2.4^n < 4$$

$$\frac{3}{\log 2.4} \leq n < \frac{4}{\log 2.4}$$

$$\text{이때, } \log 2.4 = \log \frac{24}{10} = \log 24 - \log 10$$

$$= \log(2^3 \times 3) - \log 10$$

$$= 3 \log 2 + \log 3 - 1$$

$$= 3 \times 0.3 + 0.48 - 1 = 0.38$$

$$\text{이므로 } \frac{3}{0.38} \leq n < \frac{4}{0.38}$$

$$\therefore 7.89 \times \times \times \leq n < 10.52 \times \times \times$$

따라서 위의 범위를 만족하는 최소의 정수 n 의 값은 8이다.

35. 자연수 A 에 대하여 A^{50} 이 67자리의 수일 때, A^{20} 은 몇 자리의 수인가?

① 26자리

② 27자리

③ 28자리

④ 29자리

⑤ 30자리

해설

67자리의 수이므로 $\log A^{50} = 66 + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)

$$50 \log A = 66 + \alpha$$

$$\log A^{20} = 20 \log A = \frac{20}{50}(66 + \alpha) = \frac{4}{10}(66 + \alpha)$$

$$= 26.4 + \frac{4}{10}\alpha$$

$$0 \leq \alpha < 1 \text{ 이므로 } 0 \leq \frac{4}{10}\alpha < \frac{4}{10}$$

$$0.4 \leq 0.4 + \frac{4}{10}\alpha < 0.8 \text{ 이므로}$$

$$0.4 + \frac{4}{10}\alpha \text{가 가수, 지표는 } 26$$

$\therefore$ 27자리의 수

36. 15%의 소금물 300g이 있다. 여기서 60g의 소금물을 퍼내고 같은 양의 물을 부어 넣는다. 이러한 시행을 반복할 때, 최소한 몇 번의 시행을 해야 농도가 1% 이하가 되는가? (단 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 10번

② 11번

③ 12번

④ 13번

⑤ 14번

해설

15%의 소금물 300g에 들어 있는 소금의 양 = $\frac{15}{100} \times 300 = 45(g)$
 60g의 소금물을 퍼내고 같은 양의 물을 넣으므로 소금물 전체의 양은 줄어들지 않고, 소금의 양만 $\frac{60}{300} = 20\%$ 씩 줄어든다.

처음 소금의 양 = 45g

1 회후 소금의 양 = 45×0.8

2 회후 소금의 양 = 45×0.8^2

⋮

n 회후 소금의 양 = 45×0.8^n

$$45 \times 0.8^n \leq 3$$

$$45 \times 0.8^n \leq \log 3$$

$$\log 45 + n \log 0.8 \leq \log 3$$

$$2 \log^3 + 1 - \log^2 + n(3 \log 2 - 1) \leq \log^3$$

$$n = \frac{-0.4771 - 1 + 0.3010}{-0.97} = \frac{-1.1761}{-0.097}$$

$$n = 12.124 = 13$$

37. 함수 $f(x) = 2^{-x}$ 에 대하여 $f(2a)f(b) = 4$, $f(a-b) = 2$ 일 때, $2^{3a} + 2^{3b}$ 의 값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하여라 (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$\begin{aligned} f(2a)f(b) &= 4, f(a-b) = 2 \text{에서} \\ 2^{-2a} \cdot 2^{-b} &= 2^2, 2^{-(a-b)} = 2^1 \text{이므로} \\ \therefore 2a + b &= -2, a - b = -1 \\ \therefore 3a &= -3 \therefore a = -1, b = 0 \\ \therefore 2^{3a} + 2^{3b} &= \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

38. $\log_{10} \left(4 + \frac{1}{2}\right) = a$, $\log_{10} \left(8 + \frac{1}{3}\right) = b$ 일 때, $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$ 을 a , b 로 나타내면?

① $\log_{10} 2 = \frac{4 - a - 2b}{5}$,
 $\log_{10} 3 = \frac{2 + 2a - b}{5}$

② $\log_{10} 2 = \frac{4 - a - 2b}{5}$,
 $\log_{10} 3 = \frac{2 + 3a - b}{5}$

③ $\log_{10} 2 = \frac{2 + 2a - 2b}{5}$,
 $\log_{10} 3 = \frac{5 + a - b}{5}$

④ $\log_{10} 2 = \frac{4 + 2a + 3b}{5}$,
 $\log_{10} 3 = \frac{5 + 3a - 4b}{5}$

⑤ $\log_{10} 2 = \frac{4 - 4a - 3b}{5}$,
 $\log_{10} 3 = \frac{2 + 4a + 2b}{5}$

해설

$$\log_{10} \left(4 + \frac{1}{2}\right) = \log_{10} \frac{9}{2} = \log_{10} \frac{3^2}{2}$$

$$2 \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = a \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{10} \left(8 + \frac{1}{3}\right) = \log_{10} \frac{25}{3} = \log_{10} \frac{100}{3 \times 4}$$

$$= \log_{10} \frac{10^2}{2^2 \times 3}$$

$$= \log_{10} 10^2 - (\log_{10} 2^2 + \log_{10} 3)$$

$$= 2 - 2 \log_{10} 2 - \log_{10} 3$$

$$2 - 2 \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = b \text{ 에서}$$

$$\log_{10} 3 + 2 \log_{10} 2 = 2 - b \cdots \textcircled{㉡}$$

① $\times 2 + \textcircled{㉡}$ 를 하면

$$5 \log_{10} 3 = 2a + 2 - b$$

$$\therefore \log_{10} 3 = \frac{2 + 2a - b}{5} \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\log_{10} 2 = 2 \log_{10} 3 - a = 2 \times \frac{2 + 2a - b}{5} - a$$

$$= \frac{4 + 4a - 2b}{5} - a = \frac{4 - a - 2b}{5}$$

39. 양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 정수 부분을 $f(x)$, 소수 부분을 $g(x)$ 라 하자.
 양수 a, b 에 대하여 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(a^2) = 2f(a)$

㉡ $f(a^2) + g(a^2) = 2f(a) + 2g(a)$

㉢ $g(a) + g(b) = 1$ 이면 ab 는 정수이다.

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ [반례] $a = 10^{\frac{3}{2}}$ 이면 $f(a) = 1, f(a^2) = 3$ (거짓)

㉡ $\log a = f(a) + g(a), \log a^2 = 2\log a = 2f(a) + 2g(a)$
 $\log a^2 = f(a^2) + g(a^2)$ (참)

㉢ [반례] $a = b = 10^{-\frac{1}{2}}$ 이면

$g(a) + g(b) = 1, ab = \frac{1}{10}$ (거짓)

40. 다음 두 조건을 동시에 만족시키는 자연수 k 의 개수를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad 100 \leq x \leq 300$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad [\log k] = [\log_3 x] - [\log_9 x]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9900

해설

(i) $100 \leq x < 243$ 일 때,

$$4 < \log_3 x < 5 \text{ 이므로 } [\log_3 x] = 4$$

$$\text{또 } \log_9 x = \frac{1}{2} \log_3 x \text{ 이므로}$$

$$2 < \log_9 x < \frac{5}{2}, \quad [\log_9 x] = 2$$

$$\therefore [\log k] = [\log_3 x] - [\log_9 x] = 2$$

$$\therefore 2 \leq \log k < 3 \text{ 이므로 } 10^2 \leq k < 10^3$$

(ii) $243 \leq x \leq 300$ 일 때,

$$5 \leq \log_3 x < 6 \text{ 이므로 } [\log_3 x] = 5$$

$$\text{또 } \log_9 x = \frac{1}{2} \log_3 x \text{ 이므로}$$

$$2.5 \leq \log_9 x < 3, \quad [\log_9 x] = 2$$

$$\therefore [\log k] = [\log_3 x] - [\log_9 x] = 3$$

$$\therefore 3 \leq \log k < 4 \text{ 이므로 } 10^3 \leq k < 10^4$$

(i), (ii)에 의하여 $10^2 \leq k < 10^4$

즉, 9900 개이다.