

1. 조화수열 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ 의 일반항은?

① $2n - 1$

② $2n + 1$

③ $\frac{3}{n}$

④ $\frac{6}{n}$

⑤ $\frac{1}{2n + 1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = 3, 5, 7, 9, \dots$$

등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $2n + 1$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $\frac{1}{2n + 1}$

2. 첫째항이 1, 공비가 8인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = \log_2 a_n$ 으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 135

해설

$$\begin{aligned} a_n &= 8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3} \\ b_n &= \log_2 a_n = \log_2 2^{3n-3} \\ b_n &\text{은 첫째항이 } 0, \text{ 공차가 } 3 \text{인 등차수열} \\ \therefore S_{10} &= \frac{10 \{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 3\}}{2} \\ &= 5 \cdot 27 = 135 \end{aligned}$$

3. 세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2x = 1 + 5 = 6 \quad \therefore x = 3$$

세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2 = 5$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 = 14$$

4. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 1) &= \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3\end{aligned}$$

5. $\sum_{l=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \}$ 의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^5 (k+l) &= \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l \\ \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l+15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425\end{aligned}$$

6. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$

- ① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로
 $3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

7. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

- ① 9 ② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{99}-1$
④ $\sqrt{101}-1$ ⑤ 11

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100}-1=9\end{aligned}$$

8. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$
⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

9. 등차수열 $3, 7, 11, 15, \dots$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \textcircled{7} &= \frac{3 + \textcircled{L}}{2} \\ \textcircled{L} &= \frac{\textcircled{E} + 15}{2} \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \frac{3 + 11}{2}$, $11 = \frac{7 + 15}{2}$ 가 성립하므로

$\textcircled{7}$ 는 7, $\textcircled{L}$ 는 11, $\textcircled{E}$ 는 7이다.

$\therefore \textcircled{7} + \textcircled{L} + \textcircled{E} = 7 + 11 + 7 = 25$

10. 오각형의 다섯 개의 내각을 각각 v , w , x , y , z 라 하면 $v < w < x < y < z$ 이고 순서대로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, x 의 값은?

① 92° ② 108° ③ 112° ④ 121° ⑤ 138°

해설

오각형의 내부는 세 개의 삼각형으로 나누어지므로
그 내각의 총합은 $v + w + x + y + z = 540^\circ$ 이다.
또한 각 내각을 등차수열의 각 항으로 표현하면
 d 를 공차로 생각하여 $x - 2d$, $x - d$, x , $x + d$, $x + 2d$ 와 같이
표현할 수 있다. 이것을 위 식에 대입하면
 $(x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 540^\circ$ 이므로 $x = 108^\circ$
이다.

11. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$ 의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = 85, S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots \textcircled{A}$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a = -5$, $d = 3$

$$\therefore S_{30} = \frac{30\{2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3\}}{2} = 1155$$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

12. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 5n - 1$ 일 때, $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

$n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= n^2 + 5n - 1 - \{(n-1)^2 + 5(n-1) - 1\}$
 $= 2n + 4$
 $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1 + 5 - 1 = 5$
그런데 이것은 ㉠에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같지 않으므로
수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은
 $a_n = 2n + 4 \ (n \geq 2), \ a_1 = 5$
 $\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 5 + 10 + 14 = 29$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열일 때, 수열 $\{3a_{n+1} - 2a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$\{3a_{n+1} - 2a_n\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$$

$$= (3ar - 2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$$

따라서 $r = 2$ 이고 $3ar - 2a = 12$ 이다.

$$6a - 2a = 12, 4a = 12$$

$$\therefore a = 3$$

14. 각 항이 실수이고, 제2항이 8, 제5항이 64인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① 2^9

② 2^{10}

③ 2^{11}

④ 2^{12}

⑤ 2^{13}

해설

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2 = ar = 8 \cdots \textcircled{1}$

$$a_5 = ar^4 = 64 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 으로 나누면 $r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$

$\textcircled{1}$ 으로부터 $a = 4$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \therefore a_{10} = 2^{11}$$

15. 서로 다른 세 수 a, b, c 가 이 순서로 등차수열을 이루고, b, a, c 가 등비수열을 이룰 때, $3a + 2b + c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

b 는 a 와 c 의 등차중항이므로
 $2b = a + c \cdots \textcircled{㉠}$
 a 는 b 와 c 의 등비중항이므로
 $a^2 = bc \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $c = 2b - a$ 이므로 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $a^2 = b(2b - a), a^2 + ab - 2b^2 = 0$
 $(a + 2b)(a - b) = 0$
따라서 $a = -2b$ 또는 $a = b$
그런데, a, b 는 서로 다른 수 이므로 $a = -2b$
 $c = 2b - a = 2b - (-2b) = 4b$
따라서 $3a + 2b + c = -6b + 2b + 4b = 0$

16. 첫째항이 1 이고, 공비가 4 인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000 보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000, 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times \times$$

17. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단, $1.04^{10} = 1.48$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 $1000\text{만} \times (1.04)^1$
(10년후 원리합계)
 $= 1000\text{만} \times 1.04^{10}$
 $= 1000\text{만} \times 1.48$
 $= 1480\text{만 (원)}$

18. 수열 1, 101, 10101, 1010101, ... 에서 제100 항은?

- ① $\frac{10^{200} - 1}{99}$ ② $\frac{10^{202} - 1}{99}$ ③ $10^{201} - 1$
 ④ $\frac{10^{402} - 1}{99}$ ⑤ $10^{401} - 1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10^2 + 1$$

$$a_3 = 10^4 + 10^2 + 1$$

⋮

$$a_n = 10^{2(n-1)} + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1$$

$$= \frac{1 \{ (10^2)^n - 1 \}}{10^2 - 1} = \frac{1}{99} (10^{2n} - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{1}{99} (10^{200} - 1)$$

19. $\sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3(n=2, 3, 4, \dots) \\ n=1 \text{ 일 때, } a_1 &= 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 \\ \text{따라서 } a_n &= 4n - 3(n=1, 2, 3, \dots) \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^5 (2k+2)a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k+1)(4k-3) \\ &= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k - 3) \\ &= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5 \\ &= 440 - 30 - 15 = 395 \end{aligned}$$

20. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 $\frac{5}{64}$ 는 제 몇 항인가?
- ① 제32항 ② 제33항 ③ 제34항
④ 제35항 ⑤ 제36항

해설

분모가 같은 것끼리 같은 군으로 묶으면
 $(\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}), (\frac{1}{16}, \dots), \dots$
각 군의 첫째항은 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 이므로 $\frac{1}{64}$ 는 제 6군의 첫째항이
고, 각 군의 분자는 1, 3, 5, 7, ... 이므로 $\frac{5}{64}$ 는 제 6군의 3번째
항이다.
각 군의 항수는 1, 2, 4, 8, ... 이므로 구하는 항의 수는
 $(1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 3 = 34$

21. $a_1 = 23$, $a_2 = 20$ 이고, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = -115$ 일 때, 자연수 k 의 값은?

① 43

② 44

③ 45

④ 46

⑤ 47

해설

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고
첫째항이 23, 공차가 $a_2 - a_1 = 20 - 23 = -3$ 이므로
 $a_n = 23 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 26$
 $-3k + 26 = -115$ 에서 $-3 = -141$
 $\therefore k = 47$

22. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_n + a_{n+1} = 3n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{19}$, $Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{20}$ 에 대하여 $P - Q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = 2, a_1 + a_2 = 3 \therefore a_2 = 1$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } a_2 + a_3 = 6 \therefore a_3 = 5$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } a_3 + a_4 = 9 \therefore a_4 = 4$$

$$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} - a_{2k}) = 10$$

23. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

- $a_1 = 1, a_2 = 2$
- $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore p = 3, q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

24. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

- ① $\frac{1}{n}$ ② $\frac{1}{n+1}$ ③ $\frac{1}{n+2}$ ④ $\frac{2}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1, \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 1인 등차 수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \frac{1}{n}$$

25. 높이가 h 인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n 번째 날의 탑의 높이를 a_n 이라 하면 $(n+1)$ 째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n 과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$$a_1 = \frac{h}{2} \text{ 이고, } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{h}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$\therefore a = \frac{h}{3} \text{ 이므로 } \frac{a}{h} = \frac{1}{3}$$