1. 조화수열 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$ 의 일반항은?

① $2n-1$　② $2n+1$　③ $\frac{3}{n}$
④ $\frac{6}{n}$　⑤ $\frac{1}{2n+1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$

등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $2n+1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $\frac{1}{2n+1}$

2. 첫째항이 1, 공비가 8인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \log_2 a_n$으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 135

해설

$a_n = 8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3}$

$b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{3n-3}$

b_n은 첫째항이 0, 공차가 3인 등차수열

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 3\}}{2} = 5 \cdot 27 = 135$$

3. 세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2x=1+5=6 \quad \therefore x=3$
세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2=5$
따라서 $x^2+y^2=14$

4. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$$
$$= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$$
$$= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3$$

5. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400 ② 425 ③ 450 ④ 475 ⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}l=\sum_{k=1}^{5}k+5l$

$\therefore$ (준 식) $=\sum_{l=1}^{10}(5l+15)=5\sum_{l=1}^{10}l+150$

$=5\times 55+150=425$

6. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$ ② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$ ③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$ ⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로

$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

7. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

① 9 ② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{99}-1$

④ $\sqrt{101}-1$ ⑤ 11

해설

$$(\text{준식})=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$=\sqrt{100}-1=9$$

8. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$ ② $\dfrac{n}{n+1}$ ③ $\dfrac{2n}{n+1}$

④ $\dfrac{2n}{2n+1}$ ⑤ $\dfrac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

9. 등차수열 $3, 7, 11, 15, \cdots$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.
이때, ㉠+ ㉡+ ㉢의 값을 구하여라.

$$[㉠] = \frac{3 + [㉡]}{2}$$
$$[㉡] = \frac{[㉢] + 15}{2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \dfrac{3+11}{2}$, $11 = \dfrac{7+15}{2}$ 가 성립하므로
㉠는 7, ㉡는 11, ㉢는 7이다.
$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ $= 7 + 11 + 7 = 25$

10. 오각형의 다섯 개의 내각을 각각 v, w, x, y, z라 하면 $v < w < x < y < z$이고 순서대로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, x의 값은?

① $92°$ ② $108°$ ③ $112°$ ④ $121°$ ⑤ $138°$

해설

오각형의 내부는 세 개의 삼각형으로 나누어지므로
그 내각의 총합은 $v + w + x + y + z = 540°$이다.
또한 각 내각을 등차수열의 각 항으로 표현하면
d를 공차로 생각하여 $x - 2d$, $x - d$, x, $x + d$, $x + 2d$와 같이
표현할 수 있다. 이것을 위 식에 대입하면
$(x-2d)+(x-d)+x+(x+d)+(x+2d) = 540°$이므로 $x = 108°$
이다.

11. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10} = 85,\ S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$

$S_{10} = \dfrac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots ㉠$

$S_{20} = \dfrac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -5,\ d = 3$

$\therefore\ S_{30} = \dfrac{30\{2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3\}}{2} = 1155$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

12. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 5n - 1$일 때, $a_1 + a_3 + a_5$의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 5n - 1 - \{(n-1)^2 + 5(n-1) - 1\}$

$= 2n + 4$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1 + 5 - 1 = 5$

그런데 이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같지 않으므로

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n + 4 \ (n \geq 2), \ a_1 = 5$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 5 + 10 + 14 = 29$

13. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n = ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
$= (3ar-2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$
따라서 $r=2$이고 $3ar-2a=12$이다.
$6a-2a=12,\ 4a=12$
$\therefore\ a=3$

14. 각 항이 실수이고, 제2항이 8, 제5항이 64인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① 2^9 ② 2^{10} ③ 2^{11} ④ 2^{12} ⑤ 2^{13}

해설

첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_2 = ar = 8 \ \cdots\cdots$ ㉠

$a_5 = ar^4 = 64 \ \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡으로 나누면 $r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$

㉠으로부터 $a = 4$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \therefore a_{10} = 2^{11}$

15. 서로 다른 세 수 a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루고, b, a, c가 등비수열을 이룰 때, $3a+2b+c$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

b는 a와 c의 등차중항이므로

$2b = a + c \cdots$ ㉠

a는 b와 c의 등비중항이므로

$a^2 = bc \cdots$ ㉡

㉠에서 $c = 2b - a$이므로 ㉡에 대입하면

$a^2 = b(2b-a),\ a^2 + ab - 2b^2 = 0$

$(a+2b)(a-b) = 0$

따라서 $a = -2b$ 또는 $a = b$

그런데, a, b는 서로 다른 수 이므로 $a = -2b$

$c = 2b - a = 2b - (-2b) = 4b$

따라서 $3a + 2b + c = -6b + 2b + 4b = 0$

16. 첫째항이 1 이고, 공비가 4 인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000 보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000,\ \ 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7\times\times\times$$

17. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10}=1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$
(10년후 원리합계)
$=1000$만$\times1.04^{10}$
$=1000$만 $\times1.48$
$=1480$만(원)

18. 수열 1, 101, 10101, 1010101, $\cdots$ 에서 제100항은?

① $\dfrac{10^{200}-1}{99}$ ② $\dfrac{10^{202}-1}{99}$ ③ $10^{201}-1$

④ $\dfrac{10^{402}-1}{99}$ ⑤ $10^{401}-1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 10^2 + 1$

$a_3 = 10^4 + 10^2 + 1$

$\vdots$

$a_n = 10^{2(n-1)} + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1$

$= \dfrac{1\left\{(10^2)^n - 1\right\}}{10^2 - 1} = \dfrac{1}{99}(10^{2n} - 1)$

$\therefore\ a_{100} = \dfrac{1}{99}(10^{200} - 1)$

19. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \left\{2(n-1)^2 - (n-1)\right\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$

$$= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$$

$= 440 - 30 - 15 = 395$

20. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 $\frac{5}{64}$는 제 몇 항인가?

① 제32항　② 제33항　③ 제34항
④ 제35항　⑤ 제36항

해설

분모가 같은 것끼리 같은 군으로 묶으면

$(\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}), (\frac{1}{16}, \cdots), \cdots$

각 군의 첫째항은 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ 이므로 $\frac{1}{64}$는 제 6군의 첫째항이고, 각 군의 분자는 $1, 3, 5, 7, \cdots$ 이므로 $\frac{5}{64}$는 제 6군의 3번째 항이다.

각 군의 항수는 $1, 2, 4, 8, \cdots$ 이므로 구하는 항의 수는

$(1+2+4+8+16)+3=34$

21. $a_1 = 23$, $a_2 = 20$이고, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}(n = 1, 2, 3, \cdots)$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_k = -115$일 때, 자연수 k의 값은?

① 43 ② 44 ③ 45 ④ 46 ⑤ 47

해설

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고

첫째항이 23, 공차가 $a_2 - a_1 = 20 - 23 = -3$이므로

$a_n = 23 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 26$

$-3k + 26 = -115$에서 $-3 = -141$

$\therefore\ k = 47$

22. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_n + a_{n+1} = 3n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19},\ Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$에 대하여 $P - Q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = 2,\ a_1 + a_2 = 3\ \therefore a_2 = 1$
$n = 2$일 때, $a_2 + a_3 = 6\ \therefore a_3 = 5$
$n = 3$일 때, $a_3 + a_4 = 9\ \therefore a_4 = 4$
$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 10$

23. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$이라 할 때 $p+q$의 값을 구하여라.

보기

· $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
· $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$이므로 $p + q = -45$

24. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항은?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{n+1}$ ③ $\dfrac{1}{n+2}$ ④ $\dfrac{2}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$의 양변을 역수로 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 1$, 즉 $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 1$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1} = 1$이고, 공차가 1인 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \dfrac{1}{n}$

25. 높이가 h 인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n 번째 날의 탑의 높이를 a_n 이라 하면 $(n+1)$ 째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n 과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$a_1 = \frac{h}{2}$ 이고, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$

$$\therefore a_n = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{h}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

즉, $a = \frac{h}{3}$ 이므로 $\frac{a}{h} = \frac{1}{3}$