1. x 에 대한 다항식 $4x^3-3x^2+ax+b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x)=4x^3-3x^2+ax+b$ 라 하고 $P(x)$ 가
$(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면
$P(-1)=P(3)=0$
$P(-1)=-4-3-a+b=0 \therefore\ a-b=-7$
$P(3)=108-27+3a+b=0 \therefore\ 3a+b=-81$
$\therefore\ a=-22,\ b=-15$

2. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값은?

① 4　② $\frac{13}{3}$　③ $\frac{14}{3}$　④ 5　⑤ $\frac{16}{3}$

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1, x=2$를 각각 대입하면
$x=-1$일 때,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$①
$x=2$일 때, $(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$②
①, ②를 연립하면
$m=\frac{2}{3},\ n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

3. $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 12$ 가 $x - 1$ 로는 나누어 떨어지고, $x + 1$ 로 나누었을 때는 나머지가 -14 이다. 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -12 ② 12 ③ -20 ④ 20 ⑤ -36

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 0$, $f(-1) = -14$
$f(1) = 3 + a + b - 12 = 0 \cdots$ ①
$f(-1) = -3 + a - b - 12 = -14 \cdots$ ②
①, ②를 연립하면, $a = 5$, $b = 4$
$\therefore\ ab = 20$

4. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x-1$로 나누면 나누어떨어지고, $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, $m-n$의 값은?

① -2　　② -3　　③ -4　　④ 2　　⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+mx^2+nx+1 &= (x-1)\,Q(x) \\ &= (x+2)\,Q'(x)+3 \end{aligned}$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+m+n+1=0$

$\therefore m+n=-2 \cdots$ ㉠

양변에 $x=-2$을 대입하면

$-8+4m-2n+1=3$

$\therefore 2m-n=5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m=1, n=-3$

$\therefore m-n=4$

5. x에 대한 다항식 x^3+kx^2+kx-1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1, $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2라 할 때, $R_1=R_2$를 만족하는 실수 k의 값을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+kx^2+kx-1 &= (x-2)Q_1(x)+R_1 \\ &= (x+2)Q_2(x)+R_2 \end{aligned}$$

$x=2$ 대입, $R_1=8+4k+2k-1=6k+7$

$x=-2$ 대입, $R_2=-8+4k-2k-1=2k-9$

$R_1=R_2$이므로 $6k+7=2k-9$

$\therefore\ k=-4$

6. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -2이고, $x-2$로 나눈 나머지가 1일 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $2x+1$ ② $x+1$ ③ $x-1$
④ $2x-1$ ⑤ $3x+2$

해설

$f(x)=(x+1)Q_1(x)-2$
$f(x)=(x-2)Q_2(x)+1$
$f(x)=(x+1)(x-2)Q_3(x)+ax+b$
$f(-1)=-a+b=-2,\ f(2)=2a+b=1$
$\therefore\ a=1,\ b=-1$
구하는 나머지는 $x-1$

7. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -4이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\,Q_1(x)+5 \\ &= (x+2)\,Q_2(x)-4 \\ &= (x-1)(x+2)\,Q_3(x)+R(x) \end{aligned}$$

$R(x)=ax+b$ 라 하면

$f(1)=5$이므로

$R(1)=a+b=5\cdots$①

$f(-2)=-4$이므로

$R(-2)=-2a+b=-4\cdots$②

①, ②에 의해 $a=3,\ b=2$이다.

$\therefore\ R(x)=3x+2 \Rightarrow R(2)=8$

8. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x+1, x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 $4,\ -18$ 이라고 한다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $x+4$ ② $x-4$ ③ $22x+26$
④ $22x-26$ ⑤ $x-18$

해설

$f(-1)=4,\ f(-2)=-18$
$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$
$-a+b=4,\ -2a+b=-18$
$\therefore\ a=22,\ b=26$

9. 다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 1, -4이다. $f(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(5)$의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$f(2)=1,\ f(-3)=-4$

$R(x)=ax+b$라 하면

$f(x)=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$

$2a+b=1,\ -3a+b=-4$

$\therefore\ a=1,\ b=-1$

$R(x)=x-1$

$R(5)=5-1=4$

10. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\
&= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\
&= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\
&= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1
\end{aligned}
$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

12. 다항식 $2x^{30}+2x^{28}-x$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$2x^{30}+2x^{28}-x=(x+1)Q(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입 하면,

$2+2+1=R \therefore\ R=5$

양변에 $x=1$을 대입 하면,

$2+2-1=2Q(1)+5$

$\therefore\ Q(1)=-1$

13. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지가 $4x+3$일 때 $f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① -1 ② 0 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$
$x=2$를 대입하면 $f(2)=11$
$f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 R이라 하면
$f(2x)=(x-1)Q'(x)+R$
$x=1$을 대입하면 $f(2)=R$
$\therefore\ R=11$

14. 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에서 $f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지가 2 이고 $g(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이다. $2f(x)+3g(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① 13 ② -13 ③ 16 ④ -16 ⑤ 26

해설

$f(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2$,

$\therefore\ f(1)=2$

$g(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+2x+1$,

$\therefore\ g(1)=3$

$2f(x)+3g(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는

$2f(1)+3g(1)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

15. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$ 로 나누면 3이 남고, x^2-1 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c &= (x+2)Q_1(x)+3 \\ &= (x+1)(x-1)Q_2(x) \end{aligned}$$

$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore\ abc=9$

16. 다항식 $2x^3+3x^2+ax+b$가 $x+2$로 나누어 떨어질 때, $2a-b$의 값은?

① 28 ② 12 ③ 6 ④ -4 ⑤ -12

해설

준식을 $f(x)$라 하면 $f(-2)=0$이므로
$-16+12-2a+b=0$에서 $2a-b=-4$

17. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & 1 & a & -1 & b \\
 & & c & d & a \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \boxed{5}
\end{array}
$$

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=1$
④ $d=4$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & a & -1 & b \\
 & & 1 & a+1 & a \\
\hline
 & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a}
\end{array}
$$

$k=1$, $a=3$, $b=2$, $c=1$, $d=4$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

18. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a=3$　　② $b=2$　　③ $c=-1$

④ $d=-3$　　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a & b & 1 \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a} \end{array}$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

19. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a+b+c+d+k$의 값을 구하면?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & 33 \\ \hline & 1 & 4 & 11 & \boxed{37} \end{array}$$

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & a & -1 & b \\ & & 3 & 3a+9 & 9a+24 \\ \hline & 1 & a+3 & 3a+8 & \boxed{9a+b+24} \end{array}$$

이때 $k=3,\ c=3,\ a+3=4,\ 3a+9=d,\ 9a+b+24=37$ 이므로

$k=3,\ c=3,\ a=1,\ d=12,\ b=4$

따라서 $a+b+c+d+k=1+4+3+12+3=23$

20. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

21. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2-b^2+c^2-d^2$ 의 값을 구하면?

① 56 ② 28 ③ −28 ④ −46 ⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2-5x+2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.

조립제법을 이용해 보면

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 2 & 0 & -5 & 2 & \\
 & & -2 & 2 & 3 & \\
\hline
-1 & 2 & -2 & -3 & \boxed{5} & \leftarrow d \\
 & & -2 & 4 & & \\
\hline
-1 & 2 & -4 & \boxed{1} & & \leftarrow c \\
 & & -2 & & & \\
\hline
-1 & 2 & \boxed{-6} & \leftarrow b & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & a & & & &
\end{array}
$$

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2=2^2-(-6)^2+1^2-5^2=-56$

22. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① 3, -1, 3, 2　　② 2, 3, -1, 3

③ -3, 1, -3, -2　　④ -2, -3, 1, -3

⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

-1	2	9	11	7	
		-2	-7	-4	
-1	2	7	4	3	← d
		-2	-5		
-1	2	5	-1	←	c
		-2			
	2	3	← b		
	↑				
	a				

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

23. x^3-4x^2+5x-3 을 $A(x-3)^3+B(x-3)^2+C(x-3)+D$ 로 나타낼 때, $ABCD$ 의 값을 구하면?

① -20 ② 40 ③ -60 ④ 120 ⑤ -120

해설

x^3-4x^2+5x-3 을 $x-3$ 에 대해 내림차순으로 정리하기 위해 $x-3$ 으로 반복하여 나누면 나머지가 차례로 D, C, B, A 가 되므로

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & -4 & 5 & -3 \\
 & & 3 & -3 & 6 \\
\hline
3 & 1 & -1 & 2 & \boxed{3} \leftarrow \mathrm{d} \\
 & & 3 & 6 & \\
\hline
3 & 1 & 2 & \boxed{8} \leftarrow \mathrm{c} & \\
 & & 3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} \leftarrow \mathrm{b} & & \\
 & \uparrow & & & \\
 & \mathrm{a} & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ ABCD=1\times5\times8\times3=120$

24. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x) = (x-2)Q(x)+5, Q(x) = (x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x) = (x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$= (x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3) = -9-1 = -10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3) = -3\times(-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
$P(x) = (x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x) = x(x-2)Q(x)+5x\cdots①$
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3) = -3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3) = 3$을 대입하면 $-3P(-3) = 30$

25. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9$ ······㉠
$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3$ ······㉡
㉠ + ㉡을 하면
$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$
$f(x)=(x^2+x+1)\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$
∴ 나머지는 3

26. 임의의 자연수 k에 대하여 $x-k$로 나눈 나머지가 k인 다항식 $f(x)$의 개수를 구하면?

① 0개　② 1개　③ 2개
④ 3개　⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k에 대하여 $\therefore\ f(k)=k$
따라서 $g(x)=f(x)-x$로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x)=0$이 성립
$\therefore\ g(x)=0$
즉, $f(x)=x$
$\therefore$ 1개

27. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997　② 998　③ 1997　④ $\frac{1997}{2}$　⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면

$x=1$일 때, $3=a+b$

$x=-1$일 때, $-1=-a+b$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$

$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$

$=(x-1)(x+1)Q(x)$

$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$

$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=1996\quad\therefore\ Q(1)=\frac{1996}{2}=998$

28. 다항식 x^6을 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $Q(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눌 때의 나머지는?

① $\frac{1}{64}$　② $-\frac{1}{32}$　③ $\frac{3}{32}$　④ $-\frac{3}{16}$　⑤ $\frac{1}{16}$

해설

나머지정리에 의하여 $R=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$a=-\frac{1}{2}$로 놓으면

$R=a^6$

$x^6=(x-a)Q(x)+a^6$에서

$$Q(x)=\frac{x^6-a^6}{x-a}$$
$$=x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5$$

$Q(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $Q(a)$의 값과 같으므로 $Q(a)=6a^5$

따라서 $Q\left(-\frac{1}{2}\right)=6\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{3}{16}$

29. x^8을 $x-2$로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_1(x)$, $\sqrt{r_1}$이고, $q_1(x)$를 $x-2$로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_2(x)$, $\sqrt{r_2}$일 때, $\frac{r_2}{r_1}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 16 ④ 21 ⑤ 64

해설

$x^8 = (x-2)q_1(x) + \sqrt{r_1}$ ······①

$q_1(x) = (x-2)q_2(x) + \sqrt{r_2}$ ······②

①에서 $x = 2$를 양변에 대입하면

$\sqrt{r_1} = 2^8$, $r_1 = 2^{16}$

또, $q_1(x) = \dfrac{x^8 - \sqrt{r_1}}{x-2} = \dfrac{x^8 - 2^8}{x-2}$

$= (x^7 + 2x^6 + \cdots + 2^7)$

②에서 $x = 2$를 양변에 대입하면

$q_1(2) = \sqrt{r_2}$, $r_2 = \{q_1(2)\}^2$

그런데 $q_1(2) = 8 \cdot 2^7 = 2^{10}$

$\therefore\ r_2 = 2^{20}$

따라서, $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4 = 16$

30. 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$는 $x+2$로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x+2$로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $x+f(x)$ ㉡ $x^2+f(x)g(x)$

㉢ $f(g(x))-x$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2)+g(-2)=0, f(-2)-g(-2)=4$
두식을 연립하면, $f(-2)=2,\ g(-2)=-2$
㉠ : $x+f(x) \rightarrow x=-2$를 대입하면
$-2+f(-2)=0$
㉡ : $x^2+f(x)g(x) \rightarrow x=-2$를 대입하면 $(-2)^2+f(-2)g(-2)=0$
㉢ : $f(g(x))-x \rightarrow x=-2$를 대입하면 $f(g(-2))-(-2)=f(-2)+2=4$

31. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1,\ x^2-4x+5,\ (x-1)(x^2-4x+5)$ 로 나누면 나머지가 각각 $4,\ px+q,\ (x-r)^2$ 이 될 때, pqr 의 값은? (단, $r>0$)

① -24 ② -36 ③ 20 ④ 18 ⑤ 14

해설

$f(x)=(x^2-4x+5)Q(x)+px+q\cdots$①
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x-r)^2\cdots$②
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x^2-4x+5)+px+q\cdots$③
$f(1)=4$ 이므로 ②에서 $f(1)=(1-r)^2=4$
$r>0$ 이므로 $r=3$
②, ③을 비교해 보면
$(x-r)^2=(x^2-4x+5)+px+q$
$r=3$ 을 대입하면
$(x-3)^2=x^2+(p-4)x+(q+5)$
$\therefore\ p-4=-6,\ q+5=9$
$\therefore\ p=-2,\ q=4$
$\therefore\ pqr=-24$

32. $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 3이고, 또 (x^2+x+1)로 나누면 나머지가 $2x+4$이다. 이 때, $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 구하면?

① x^2+x+3　② x^2+2x+3　③ $-x^2+x+3$

④ $-x^2+2x+3$　⑤ x^2+3x+1

해설

$f(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$라 하면
$f(x)$를 (x^2+x+1)로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c에서 발생한다.
$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+2x+4\cdots$㉠
$\therefore\ f(x)=(x^3-1)Q(x)+a(x^2+x+1)+(2x+4)$
그런데 $f(1)=3$이므로 $3a+6=3$
$\therefore$ ㉠에서 $b=1,\ c=3$
따라서, 구하는 나머지는 $-x^2+x+3$

33. 다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-1)$, x^2+2x+2로 나눈 나머지가 각각 16, $-11x+2$라고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 하면 $R(0)$의 값은?

① 6　　② 8　　③ -2　　④ 1　　⑤ -4

해설

$R(x)$는 삼차 이하의 다항식이므로
$R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f(x)=(x+2)(x-1)Q_1(x)+16\cdots$㉠
$f(x)=(x^2+2x+2)Q_2(x)-11x+2$
$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d$
$=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x)+(ax+k)(x^2+2x+2)-11x+2$
$=(x^2+2x+2)\{(x+2)(x-1)Q_3(x)+ax+k\}$
$-11x+2\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$f(1)=16=5(a+k)-11+2$
$\therefore\ a+k=5\cdots$㉢
$f(-2)=16=2(-2a+k)+22+2$
$\therefore\ -2a+k=-4\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=3,\ k=2$
따라서
$R(x)=(3x+2)(x^2+2x+2)-11x+2$
$\therefore R(0)=6$

34. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$

또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

35. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2+1)(x-1)g(x) + ax^2 + bx + c$로 두면 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로
$ax^2+bx+c = a(x^2+1)+bx+c-a$에서
$bx+c-a = x+1$
$\therefore\ b=1,\ c-a=1$
또, $f(1) = a+b+c = 4$이므로
$c-1+1+c=4$에서 $c=2$

36. 4차의 다항식 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{2}{3}$, $f(3)=\frac{3}{4}$, $f(4)=\frac{4}{5}$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ $\frac{5}{6}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라

$f(n)=\frac{n}{n+1}(n=0,1,2,3,4)$

$(n+1)f(n)-n=0$

$g(x)=(x+1)f(x)-x$로 놓으면

$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$

그런데 $g(x)$는 다항식이므로 나머지정리에 의해

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 갖는다.

또, $f(x)$가 4차식이므로 $g(x)$는 5차식이다.

$\therefore\ g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(a\neq 0)\cdots$ ㉠

그런데, $g(-1)=1$이므로 ㉠에서

$g(-1)=-(5\times4\times3\times2\times1)a=1$

$\therefore\ a=-\frac{1}{(5\times4\times3\times2\times1)}$

$g(x)=(x+1)f(x)-x$

$=-\frac{1}{(5\times4\times3\times2\times1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$g(5)=6f(5)-5=-\frac{(5\times4\times3\times2\times1)}{(5\times4\times3\times2\times1)}=-1$

$\therefore\ f(5)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

37. 2003^{10} 를 2002 와 2004 로 나눈 나머지가 각각 a, b 일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

2002를 x 라 하면, $2003^{10}=(x+1)^{10}$
$(x+1)^{10}=xQ(x)+a$
$(x+1)^{10}=(x+2)Q(x)+b$
나머지 정리에 의해
$x=0$, $x=-2$ 를 각각 대입하면,
$a=1$, $b=1$
$\therefore a-b=0$

38. 다음은 다항식 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$이 x^2+x+1로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n을 구하는 과정이다. (   )에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

> ω가 다항식 $x^2+x+1=0$을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2+\omega+1=0$
> $\therefore\ \omega^3,\ \omega \neq 1$
> (i) $n=3k(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\quad \omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=(\text{ ㉠ }) \neq 0$
> (ii) $n=3k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\quad \omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=(\text{ ㉡ })$
> (iii) $n=3k+2(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> $\quad \omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
> 따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 (㉢)이다.

① $1, 0, 3k$　　② $2, 1, 3k+1$　　③ $3, 0, 3k+2$
④ $3, 0, 3k$　　⑤ $2, 1, 3k$

해설

(i) $n=3k$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
$=\omega^{6k}+1+(\omega+1)^{6k}$
$=\omega^{6k}+1+(-\omega^2)^{6k}$
$=(\omega^3)^{2k}+1+(\omega^3)^{4k}$
$=1+1+1(\because\ \omega^3=1)=(\ 3\ ) \neq 0$
(ii) $n=3k+1$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
$=\omega^{6k+2}+1+(\omega+1)^{6k+2}$
$=\omega^{6k}\cdot\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k+2}$
$=\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}(-\omega^2)^2$
$=\omega^2+1+\omega=(\ 0\ )$
(iii) $n=3k+2$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 $(3k)$이다.

39. 다항식 $f(x)$는 다항식 $g(x)$로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫과 나머지는?

① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$

② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$

④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$

⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) \cdots$ ㉠
$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$

$r(x)$가 $g(x)$보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$는 $\{g(x)\}^2$보다 낮은 차수이다.
따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$이고 몫은 $h(x)$이다.

40. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

α가 될 수 있는 상수항 -2의 약수인 ±1, ±2을 준식에 차례로 대입해 보면

$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0,\ 4a + b = -9$

$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0,\ 4a + b = 9$

그런데, 위의 세 식은 a, b가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$\therefore\ \alpha = -2$ 이고 $4a + b = 9$

$\alpha = -2,\ a = 2,\ b = 1\ (\because\ a > b)$

$\therefore\ \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$

41. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2, f(3) = 3$이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나눈 나머지는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x - 1, x - 2, x - 3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
$\therefore f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

42. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8　　② -4　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
 & & 1 & 3 & & \\ \hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
 & & 1 & & & \\ \hline
 & a = 1 & \boxed{4} = b & & &
\end{array}
$$

$\therefore 2c - bd = -4$