

1. -64 의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-4, 2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$

해설

-64 의 세제곱근은 $x^3 = -64$ 를 만족하는 x 의 값이므로
 $x^3 + 64 = 0$ 에서

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 0$$

$$\therefore x + 4 = 0 \text{ 또는 } x^2 - 4x + 16 = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2 + 2\sqrt{3}i \text{ 또는 } x = 2 - 2\sqrt{3}i$$

따라서 -64 의 세제곱근은

$$-4, 2 + 2\sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$$

2. 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① -2 는 -16 의 네제곱근이다.
- ② 4 는 16 의 세제곱근이다.
- ③ 8 의 세제곱근은 2 뿐이다.
- ④ 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 이다.
- ⑤ -4 는 -64 의 세제곱근이다.

해설

① $(-2)^4 = 16 \neq -16$ 이므로 -2 는 -16 의 네제곱근이 아니다.

② $4^3 = 64 \neq 16$ 이므로 4 는 16 의 세제곱근이 아니다.

③ 8 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 8$ 이므로

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

따라서, 8 의 세제곱근은 2 외에도 $-1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$ 가 있다.

④ 81 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로

$$x^4 - 81 = 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$

$$(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 3 \text{ 또는 } x = \pm 3i$$

따라서, 81 의 네제곱근은 $3, -3$ 외에도 $3i, -3i$ 가 있다.

⑤ $(-4)^3 = -64$ 이므로 -4 는 -64 의 세제곱근이다.

3. -8 의 세제곱근 중에서 실수를 a , 16 의 네제곱근 중에서 실수를 b 라 할 때, $a + b^2$ 의 값을 구하면?

① 0

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$$a = -2$$

$$b = 2 \text{ or } -2$$

$$a + b^2 = -2 + 4 = 2$$

4. $(\sqrt[5]{2})^4 \times \sqrt[5]{64}$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ $\sqrt[5]{128}$

④ 4

⑤ $\sqrt[5]{512}$

해설

$$2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{6}{5}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

5. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ 를 간단히 하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

6. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = \sqrt[6]{6}$

② $\sqrt[4]{-16} = -2$

③ $\frac{\sqrt[3]{200}}{\sqrt[3]{25}} = 2$

④ $\sqrt[3]{\sqrt{243}} = 3$

⑤ $(\sqrt[8]{1000})^2 = 10$

해설

① $\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2}\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

② $\sqrt[4]{-16} = x$ 라 하면 $x^4 = -16$ 인 실수 x 는 존재하지 않는다.

③ $\frac{\sqrt[3]{200}}{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

④ $\sqrt[3]{\sqrt{243}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^5}} = \sqrt[6]{3^5}$

⑤ $(\sqrt[8]{1000})^2 = \sqrt[4]{1000} = \sqrt[4]{10^3}$

7. $12^3 \times 2^{-4} \div 3^2$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 12

⑤ 24

해설

$$\begin{aligned}(2^2 \times 3)^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} &= 2^6 \times 3^3 \times 2^{-4} \times 3^{-2} \\ &= 2^2 \times 3 = 12\end{aligned}$$

8. $\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② 1

③ $\sqrt{5}$

④ 5

⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned} \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} &= \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (25)^{\frac{1}{2}} = 5 \end{aligned}$$

9. $\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{-\frac{8}{3}}$ 을 간단히 하면?

① -16

② -4

③ 4

④ 8

⑤ 16

해설

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4} \times (-\frac{8}{3})} = \left(\frac{1}{4}\right)^{(-2)} = 2^{-2 \times (-2)} = 2^4 = 16$$

10. $\log_a \sqrt{3} = \log_b 9$ 일 때, $\log_{ab} b$ 의 값은?

① 2

② $\frac{8}{5}$

③ $\frac{5}{4}$

④ 1

⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$$\log_a \sqrt{3} = \log_b 9 \text{ 에서}$$

$$\frac{\log \sqrt{3}}{\log a} = \frac{\log 9}{\log b}, \quad \frac{\frac{1}{2} \log 3}{\log a} = \frac{2 \log 3}{\log b}$$

$$\frac{\log b}{\log a} = 4$$

$$\therefore \log_a b = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{\sqrt{ab}} b &= \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{ab}} \\ &= \frac{\log_a b}{\frac{1}{2} \log_a ab} = \frac{2 \log_a b}{1 + \log_a b} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

11. $(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② -1

③ 0

④ $\log_3 2$

⑤ $\log_2 3$

해설

$$\begin{aligned} & (\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75 \\ &= (\log_3 2)(\log_2 5) - \log_9 75 \\ &= \log_3 5 - \frac{1}{2} \log_3 75 \\ &= \log_3 \frac{5}{5\sqrt{3}} \\ &= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

12. $(\log_3 2)(\log_4 9) - \log_4 36$ 의 값은?

① $-\log_2 3$

② $-\log_3 2$

③ 0

④ $\log_3 2$

⑤ $\log_2 3$

해설

$$\begin{aligned} & (\log_3 2)(\log_4 9) - \log_4 36 \\ &= (\log_3 2)(\log_2 3) - \log_2 6 \\ &= 1 - \log_2 6 = -\log_2 3 \end{aligned}$$

13. $a = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ 일 때, $\sqrt[6]{24}$ 를 a , b 로 나타낸 것은?

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$

③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$

④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$

⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

해설

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \quad b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt[6]{24} &= \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{3} \\ &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

14. $a = 5 \times 729^x$ 일 때, 27^x 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$$

$$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$$

$$\therefore 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

15. $3^x = 2$ 일 때, $(\frac{1}{9})^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(\frac{1}{9})^{-x} = (3^{-1})^{-x} = 3^x = 2$$

16. $\log_{\sqrt{2}}(\log_x 4) = 4$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

$$\log_{\sqrt{2}}(\log_x 4) = 4 \text{에서}$$

$$\log_x 4 = (\sqrt{2})^4 = 4$$

$$\therefore x^4 = 4, x^2 = 2$$

이 때, 밑의 조건에서 $x \neq 1, x > 1$ 이므로 $x = \sqrt{2}$

17. $\log_9 x = -\frac{3}{2}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{27}$

해설

$$\log_9 x = -\frac{3}{2}$$

$$\iff x = 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

18. $\log_{(x-1)}(-x^2 + 4x - 3)$ 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $1 < x < 2, 2 < x < 3$

② $1 < x \leq 2, 2 < x < 3$

③ $1 < x < 2, 2 < x \leq 3$

④ $1 < x < 2, 2 \leq x < 3$

⑤ $1 < x < 3, 3 < x < 4$

해설

밑 : $x - 1 > 0, x - 1 \neq 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

진수 : $-x^2 + 4x - 3 > 0$

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$(x - 1)(x - 3) < 0, 1 < x < 3 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

따라서 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 를 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\therefore 1 < x < 2, 2 < x < 3$$

19. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(20^x) = \frac{1}{x} - \log_3 5$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$

⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$$20^x = 3 \text{ 이라 하면 } x = \log_{20} 3$$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

20. $\sqrt[3]{2^a} = 4$, $\log_3 b = 1 - \log_3 \frac{1}{9}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 162

해설

$$\sqrt[3]{2^a} = 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{a}{3}} = 2^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{3} = 2 \Leftrightarrow a = 6$$

$$\log_3 b = 1 - \log_3 \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 b = \log_3 3 + \log_3 3^2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 b = \log_3 3^3$$

$$\Leftrightarrow b = 3^3$$

$$\therefore ab = 6 \times 3^3 = 162$$

21. 1이 아닌 양수 p 와 세 양수 x, y, z 에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$ 가 성립할 때, xyz 의 값은?

① $\frac{1}{p^3}$

② $\frac{1}{2p}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $2p$

⑤ p^2

해설

$$\begin{aligned} & \log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z \\ &= \log_p x + \frac{2}{2}\log_p y + \frac{3}{3}\log_p z \\ &= \log_p xyz = -3 \\ &\therefore xyz = p^{-3} = \frac{1}{p^3} \end{aligned}$$

22. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{a}$

② $\sqrt[3]{a}$

③ $\sqrt[3]{a^2}$

④ $\sqrt[4]{a}$

⑤ $\sqrt[6]{a}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} &= \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \\ \sqrt[6]{\frac{a^2}{a}} &= \sqrt[6]{a}\end{aligned}$$

23. $2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} &= 2^{\sqrt{2}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1} \\ &= 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

24. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$

② $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$

③ $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^5}}$

④ $\sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$

⑤ $\sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[8]{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \times \frac{b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}} \\ &= a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} \times b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = a^{-\frac{3}{8}} \times b^{\frac{3}{8}} \\ &= \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{8}}} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{\sqrt[8]{a^3}} = \sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}} \end{aligned}$$

25. $x = 2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16

② 64

③ 256

④ 1024

⑤ 65536

해설

$$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$$

$2^{10} = 1024$, $2^6 = 64$ 이므로

$$\therefore 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$$

26. $x > 0$ 이고 $x^2 + x^{-2} = 7$ 일 때, $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1})$ 의 값은?

① $\sqrt{7}$

② $2\sqrt{5}$

③ $3\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{7}$

⑤ $7\sqrt{3}$

해설

곱셈 공식을 써서 식을 변형한다.

$$x^2 + x^{-2} = 7$$

$$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2 \text{에서}$$

$$(x + x^{-1})^2 = 7 + 2 = 9$$

$$x + x^{-1} > 0 \text{이므로 } x + x^{-1} = 3$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2 \text{에서}$$

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 + 2 = 5$$

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) = 3\sqrt{5}$$

27. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$x^3 + x^{-3}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$$

$$x - 2 + x^{-1} = 4$$

$$x + x^{-1} = 6$$

$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$$

$$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$$

28. $1 + \log_9 12 - \log_9 4$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\log_9 12 - \log_9 4 &= 1 + \log_9 9 + \log_9 12 - \log_9 4 \\ &= \log_9 (9 \times 12 \div 4) \\ &= \log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

29. $\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{2}$ 의 값을 구하면?

① 0

② -1

③ 1

④ -2

⑤ 2

해설

로그의 성질에 의하여
 $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{2} &= \log_2 \left(6 \div \frac{3}{2} \right) \\ &= \log_2 \left(6 \times \frac{2}{3} \right) = 2\end{aligned}$$

30. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2 + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & \log_{10} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99}\right) \\ &= \log_{10} \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \log_{10} 100 = 2 \end{aligned}$$

31. $3^a = 2$, $3^b = 7$ 일 때, $\log_6 84$ 를 a , b 로 나타내면?

① $\frac{2a + b + 1}{a + 1}$

② $\frac{a + 2b + 1}{b + 1}$

③ ab

④ $\frac{2a + b - 1}{a + 1}$

⑤ $\frac{2a + b - 1}{b + 1}$

해설

$3^a = 2$ 이므로 $a = \log_3 2$, $3^b = 7$ 이므로 $b = \log_3 7$

$$\therefore \log_6 84 = \frac{\log_3 84}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (2^2 \times 3 \times 7)}{\log_3 (2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$= \frac{2\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1} = \frac{2a + b + 1}{a + 1}$$

32. $5^a = 2$, $5^b = 3$ 이라 할 때, $\log_6 72$ 를 a 와 b 의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{a+b}{a-b}$

② $\frac{2a+b}{b-a}$

③ $\frac{2a-b}{a+b}$

④ $\frac{2a+b}{a+b}$

⑤ $\frac{3a+2b}{a+b}$

해설

$$a = \log_5 2, b = \log_5 3$$

$$\log_6 72 = \frac{3 \log_5 2 + 2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a + 2b}{a + b}$$

33. $2^x = a$, $2^y = b$ 일 때, $\log_{2ab} a^3 b^2$ 을 x , y 로 나타내면?

① $\frac{3x + 2y}{1 + x + y}$

② $\frac{2x + 3y}{2 + x + y}$

③ $\frac{2 + x + y}{3x + 2y}$

④ $\frac{x^2 y^2}{4xy}$

⑤ $\frac{4xy}{x^3 y^2}$

해설

$2^x = a$, $2^y = b$ 이므로

$$\log_{2ab} a^3 b^3 = \log_{2 \cdot 2^x \cdot 2^y} (2^x)^3 \cdot (2^y)^2$$

$$= \log_{2^{1+x+y}} 2^{3x+2y}$$

$$= \frac{3x + 2y}{1 + x + y} \log_2 2 = \frac{3x + 2y}{1 + x + y}$$