1. 8의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$

해설

8의 세제곱근은 $x^3=8$을 만족하는 x의 값이므로
$x^3-8=0$에서
$(x-2)(x^2+2x+4)=0$
$\therefore\ x-2=0$ 또는 $x^2+2x+4=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}i$
따라서 8의 세제곱근은
$2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$

2. 식 $\sqrt[3]{24}+2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{81}$을 간단히 하면?

① -2　　② $-\sqrt[3]{3}$　　③ $\sqrt[3]{3}$　　④ $2\sqrt[3]{3}$　　⑤ $3\sqrt[3]{3}$

해설

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{24}+2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{81}\\&=2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}\\&=\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

3. $9^{\frac{2}{3}} \div 12^{\frac{1}{3}} \times 108^{\frac{1}{3}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

해설

$$9^{\frac{2}{3}} \div 12^{\frac{1}{3}} \times 108^{\frac{1}{3}}$$
$$= (3^2)^{\frac{2}{3}} \div (2^2 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 3^{\frac{4}{3}} \div \left(2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}\right) \times \left(2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}}\right)$$
$$= 2^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}$$
$$= 2^0 \times 3^2$$
$$= 9$$

4. $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1$이고 $\log_{a^2 b} ab^2 = 3$일 때, $\log_a b$의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 3　⑤ 5

해설

$\log_{a^2 b} ab^2 = \dfrac{\log ab^2}{\log a^2 b} = \dfrac{\log a + 2\log b}{2\log a + \log b} = 3$에서

$\log a + 2\log b = 6\log a + 3\log b$

$-5\log a = \log b$

$-5 = \log_a b$

$\therefore\ \log_a b = -5$

5. $3^{2\log_3 4 - 3\log_3 2}$ 을 간단히 하면?

① $\log_3 2$ ② 1 ③ $2\log_3 2$

④ $\log_2 3$ ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} 3^{2\log_3 4 - 3\log_3 2} &= 3^{\log_3 16 - \log_3 8} \\ &= 3^{\log_3 2} \\ &= 2^{\log_3 3} = 2 \end{aligned}$$

6. $\sqrt[3]{a\sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 를 간단히 하면?

① $\sqrt[4]{a^3}$ ② $\sqrt[6]{a^5}$ ③ $\sqrt[13]{a^5}$ ④ $\sqrt[7]{a^8}$ ⑤ $\sqrt{a^5}$

해설

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$$

$$= \sqrt[3]{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$$

$$= \left(a^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$$

7. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$

$\therefore$ 참

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$ $\therefore$ 거짓

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}}$ $\therefore$ 거짓

8. $4^{x-1}=a$일 때, $\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x}$을 a에 대한 식으로 나타낸 것은?

① $\sqrt{a}$　② $a\sqrt[5]{a}$　③ $\sqrt[5]{a}$　④ $\sqrt[5]{a^2}$　⑤ $a^2\sqrt{a}$

해설

$4^{x-1}=2^{2(x-1)}=a$이므로

$2^{x-1}=a^{\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{1-x}=(2^{-5})^{1-x}=2^{5(x-1)}$$
$$=(2^{x-1})^5=(a^{\frac{1}{2}})^5=a^{\frac{5}{2}}=a^2\sqrt{a}$$

9. 다음 식의 값 중 값이 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$

② $\log_{\sqrt{5}} 25$

③ $\log_2 3 \log_3 5 \log_5 16$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \dfrac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4$

③ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16 = \dfrac{\log 3 \cdot \log 5 \cdot \log 16}{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 5}$

$= \dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 16 = \log_2 16 = 4$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \dfrac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

10. $\log_3 10$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{10}{9}$　③ $\dfrac{10}{3}$　④ $\dfrac{100}{9}$　⑤ $\dfrac{100}{3}$

해설

$\log_3 10 = 2 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$ 이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3 \dfrac{10}{9}$ 이 된다.

따라서 $3^\alpha = 3^{\log_3 \frac{10}{9}} = \dfrac{10}{9}$ 이다.

11. $\log_{10} 5 = a$, $\log_{10} 7 = b$라 할 때, 다음 중 $pa + qb + r$의 꼴로 나타낼 수 없는 것은? (단, p, q, r은 유리수)

① $\log_{10} 20$　② $\log_{10} 3.5$　③ $\log_{10} 75$
④ $\log_{10} \sqrt{14}$　⑤ 1

해설

$\log_{10} 75 = \log_{10} 25 \times 3 = \log_{10} 5^2 + \log_{10} 3$
$= 2 \cdot a + 0 \cdot b + \log_{10} 3$
$\log_{10} 3$은 유리수가 아니므로
$\log_{10} 75$는 $pa + qb + r$(p, q, r은유리수) 의 꼴로 나타낼 수 없다.

12. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$일 때, $a + 2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

13. $\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} \times \sqrt[4]{15-4\sqrt{14}}$의 값은?

① 1　② $\sqrt{3}+1$　③ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

④ $\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{2}+7$

해설

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} \times \sqrt[4]{15-4\sqrt{14}} \\
&= \sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} \times \sqrt[4]{15-2\sqrt{56}} \\
&= \sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} \times \sqrt[4]{(\sqrt{8}-\sqrt{7})^2} \\
&= \sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} \times \sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} \\
&= \sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2} = 1
\end{aligned}$$

14. $x>0$이고 $x+x^{-1}=3$일 때, $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=x+x^{-1}+2$에서

$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=3+2=5$이므로

이 때, $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$이므로 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

15. 어떤 도형이 그려진 종이를 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7회째 복사본에서 도형의 넓이는 4회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

① $\sqrt[7]{8}$　② $\sqrt[5]{8}$　③ $\sqrt[3]{8}$　④ $\sqrt[5]{4}$　⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A, 확대 배율을 a로 놓으면 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^5$이므로

$A \cdot a^5 = 2A$에서 $a^5 = 2 \quad \therefore \ a = \sqrt[5]{2}$

7회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$

4회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

16. $\log_{10}(1+1)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준식)$=\log_{10}2+\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{10}\frac{100}{99}$

$=\log_{10}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$

$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2$

17. $2^a = 20^b = 10^{10}$ 일 때, $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $-\dfrac{1}{6}$ ④ $-\dfrac{1}{8}$ ⑤ $-\dfrac{1}{10}$

해설

$$a = \frac{10}{\log 2},\ b = \frac{10}{1+\log_2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{\log 2}{10} - \frac{1+\log 2}{10} = -\frac{1}{10}$$

18. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.141} = \frac{1}{3}\log 0.141 = \frac{1}{3}\log(1.41 \times 10^{-1})$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1)$$
$$= -0.2836 = -1 + 0.7164$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164 이다.

19. 두 양수 A, $\frac{1}{A}$의 상용로그의 소수 부분을 각각 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$이 정수 부분을 n이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$\log \frac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$

$= -(n+\alpha) = -n-\alpha$

$= (-n-1) + (1-\alpha)$

따라서 $\log \frac{1}{A}$의 소수 부분은 $1-\alpha$이므로 $\beta = 1-\alpha$

$\therefore \alpha + \beta = \alpha + (1-\alpha) = 1$

20. 다음 세 조건을 동시에 만족하는 두 자연수 x, y에 대하여 xy는?

㉠ x와 y의 상용로그의 정수 부분은 같다. ㉡ x와 $\frac{1}{y}$의 상용로그의 소수 부분은 같다. ㉢ x^3y^2의 상용로그의 정수 부분은 7이다.

① 10　② 100　③ 1000　④ 2500　⑤ 8000

해설

㉠ $\log x = n + \alpha$, (단, n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)

$\log y = n + \beta (0 \le \beta < 1)$

㉡ $\log \frac{1}{y} = \log y^{-1} = -\log y$

$= -n - \beta = -n + 1 - 1 - \beta$

$= (-n - 1) + 1 - \beta$

$1 - \beta = \alpha$

$\therefore \ \alpha + \beta = 1$

㉢ $\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y$

$= 3(n + \alpha) + 2(n + \beta)$

$= 5n + 3\alpha + 2\beta$

정수 부분이 7이므로

소수 부분은 $3\alpha + 2\beta - 2, \ n = 1$

$\therefore \log^{xy} = \log x + \log y$

$= n + \alpha + n + \beta$

$= 2n + \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$

$\therefore xy = 10^3 = 1000$

21. 7^{100} 은 85자리의 수이다. 이 때, 7^{10} 의 자릿수는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

7^{100} 은 85자리의 수이므로 $\log 7^{100}$ 의 지표는 84이다.

$84 \leq \log 7^{100} \leq 85, 84 \leq 100 \log 7 \leq 85$

$0.84 \leq \log 7 \leq 0.85$

$0.84 \times 10 \leq 10 \log 7 \leq 0.85 \times 10$

$8.4 \leq \log 7^{10} \leq 8.5$

따라서 $\log 7^{10}$ 의 지표가 8이므로 7^{10} 은 9자리의 수이다.

22. 상용로그 $\log x$의 정수 부분은 3이고, $\log x$와 $\log x^2$의 소수 부분의 합은 1이다. 이때, $\log x^3$의 값은?

① 9 또는 10 ② 10 또는 11 ③ 11 또는 12
④ 12 또는 13 ⑤ 13 또는 14

해설

$\log x = 3 + \alpha (0 \le \alpha < 1)$로 놓으면
$\log x^2 = 2\log x = 6 + 2\alpha (0 \le 2\alpha < 2)$이므로

(i) $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때,
$\log x^2$의 소수 부분은 2α이므로
$\alpha + 2\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$

(ii) $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ 일 때,
$\log x^2$의 소수 부분은 $2\alpha - 1$이므로
$\alpha + (2\alpha - 1) = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}$

(i),(ii)에서 $\alpha = \frac{1}{3}$ 또는 $\alpha = \frac{2}{3}$이므로
$\log x^3 = 3\log x = 9 + 3\alpha$의 값은 10또는 11이다.

23. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\log_2(S_n+k)=n$이다. 이때, 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되게 하는 상수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log_2(S_n+k)=n$에서

$S_n+k=2^n \quad \therefore\ S_n=2^n-k$

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2^1-k=2-k$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-k)-(2^{n-1}-k)$

$=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$

따라서 수열 $a_2,\ a_3,\ a_4,\cdots$ 는 공비가 2인 등비수열이다.

(i), (ii)로부터 수열 $2-k,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$이 등비수열이 되어야 하므로

$2-k=1 \quad \therefore\ k=1$

24. 해수면의 빛의 밝기가 A인 어느 지역의 바닷물은 깊이가 일정하게 깊어질수록 빛의 밝기가 일정한 비율로 감소한다고 한다. 깊이가 xm인 곳의 빛의 밝기를 L이라 하면 다음과 같은 관계가 있다.

$L = Ak^x$(단, k는 $k \neq 1$인 양의 상수)

이 지역의 바다에서 깊이가 20m인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기의 50%일 때, 물속에서의 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$이 되는 지점의 수심은 am이다. 이때, 실수 a의 값을 구하여라. (단, $\log_2 3 = 1.6$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

깊이가 20m인 곳의 빛의 밝기는 해수면의 빛의 밝기 A의 50%이므로

$$Ak^{20} = \frac{1}{2}A \quad \therefore\ k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{20}}$$

따라서, 빛의 밝기가 해수면의 빛의 밝기의 $\frac{1}{6}$이 되는 지점의 수심을 xm라 하면

$$A \cdot 2^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{6}A \quad \therefore 2^{-\frac{z}{20}} = \frac{1}{6}$$

위의 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$-\frac{x}{20} = \log_2 \frac{1}{6} = -\log_2 6$$

$$\therefore\ x = 20(\log_2 2 + \log_2 3)$$

$$= 20(2 + 1.6) = 72(\text{m})$$

25. 어느 도시의 최근 인구 증가율은 연평균 4% 라고 한다. 이 도시의 인구가 이러한 추세로 증가한다면 10 년 후의 이 도시의 인구는 현재의 k 배이다. 이때, $100k$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 1.04 = 0.017, \log 1.48 = 0.17$ 로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 148

해설

일정한 비율로 증가하거나 감소한 후의 양을 지수의 식으로 나타낸다.
현재 이 도시의 인구의 수를 A 라 하면 10 년 후의 이 도시의 인구의 수는 kA 이다.
$A(1+0.04)^{10} = kA, 1.04^{10} = k$
이 식의 양변에 상용로그를 취하면
$\log 1.04^{10} = \log k$
이 때, $10 \log 1.04 = 10 \times 0.017$ 이므로
$\log k = 0.17 \quad \therefore \ k = 1.48$
$\therefore 100k = 148$