1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[3]{-64}=-4$

② $\sqrt[4]{81}=3$

③ $\sqrt[5]{-32}=-2$

④ $-\sqrt[3]{0.008}=-0.2$

⑤ $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=1$

해설

⑤ $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})$
$=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{2^3}=5$

2. 1이 아닌 양수 p와 세 양수 x, y, z에 대하여 $\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z = -3$가 성립할 때, xyz의 값은?

① $\frac{1}{p^3}$ ② $\frac{1}{2p}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $2p$ ⑤ p^2

해설

$\log_p x + 2\log_{p^2} y + 3\log_{p^3} z$

$= \log_p x + \frac{2}{2}\log_p y + \frac{3}{3}\log_p z$

$= \log_p xyz = -3$

$\therefore xyz = p^{-3} = \frac{1}{p^3}$

3. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x의 범위는?

① $-1 < x < 3$ ② $0 > x$ ③ $2 < x < 5$

④ $3 < x < 4$ ⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x-3>0,\ x-3\neq 1$

따라서 $x>3,\ x\neq 4 \cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+6x-8>0$

$x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-4)<0$

따라서 $2<x<4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $3<x<4$

4. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$\log_{10} 2\cdot(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{99})$
$=\log_{10}\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{99}{98}\cdot\frac{100}{99}$
$=\log_{10}100=2$

5. $a > 0, b > 0$일 때, $\log_4(a+2b)+\log_4\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ 3

해설

$$\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4\right)$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4$$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$$\log_4(4+4)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$$

6. $\log_2 14$의 소수부분을 $a(0 \le a < 1)$이라 할 때, 2^{a+2}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\log_2 14 = 1 + \log_2 7$

$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$

$2 < \log_2 n < 3$

정수 부분 : $1 + 2 = 3$

소수 부분 : $\log_2 14 - 3 = \log_2 \dfrac{14}{8} = a$

$a + 2 = a + \log_2 4$

$= \log_2 \dfrac{14}{8} \cdot 4 = \log_2 \frac{14}{2} = \log_2 7$

$2^{a+2} = 2^{\log_2 7} = 7$

7. $2^x = a,\ 2^y = b$ 일 때, $\log_{2ab} a^3b^2$ 을 $x,\ y$ 로 나타내면?

① $\dfrac{3x+2y}{1+x+y}$ ② $\dfrac{2x+3y}{2+x+y}$ ③ $\dfrac{2+x+y}{3x+2y}$

④ $\dfrac{x^2y^2}{4xy}$ ⑤ $\dfrac{4xy}{x^3y^2}$

해설

$2^x = a,\ 2^y = b$ 이므로

$\log_{2ab} a^3b^3 = \log_{2\cdot 2^x \cdot 2^y} (2^x)^3 \cdot (2^y)^2$

$= \log_{2^{1+x+y}} 2^{3x+2y}$

$= \dfrac{3x+2y}{1+x+y} \log_2 2 = \dfrac{3x+2y}{1+x+y}$

8. 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2일 때, 등식 $\log\frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$을 만족하는 자연수 n의 개수는?

① 56 ② 57 ③ 58 ④ 59 ⑤ 60

해설

$\log\frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$에서

$\log A - \log 2 = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$

$\log A = \log 2 + 2\log 2\sqrt{2} + \log n = \log 2 + \log 8 + \log n = \log 16n$

$A = 16n$

그런데, 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2이므로

$2 \le \log A < 3, 10^2 \le A < 10^3$

$\therefore 100 \le 16n < 1000$

$6.25 \le n < 62.5$

따라서 자연수 n의 개수는 $62 - 6 = 56$이다.

9. $[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 2014]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2007　② 3515　③ 4914　④ 4935　⑤ 7826

해설

(i) $1 \le n < 10$일 때, $0 \le \log n < 1$이므로 $[\log n]=0$
(ii) $10 \le n < 100$일 때, $1 \le \log n < 2$이므로 $[\log n]=1$
(iii) $100 \le n < 1000$일 때, $2 \le \log n < 3$이므로 $[\log n]=2$
(iv) $1000 \le n < 10000$일 때, $3 \le \log n < 4$이므로 $[\log n]=3$
(i), (ii), (iii), (iv)에서
$[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 2014]$
$=0\times 9+1\times 90+2\times 900+3\times 1015=4935$

10. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $6x$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 14

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$로 치환 $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5(\because t > 0)$

$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{1-0.3}{0.3} = \dfrac{7}{3}$

따라서 구하는 값은 $6x = 14$

11. 어떤 용기에 있는 물의 양은 전날 같은 시각의 물의 양의 9% 만큼 줄어든다고 한다. 이와 같은 비율로 물의 양이 줄어들 때, 8일이 지난 후의 물의 양은 처음 양의 $\dfrac{1}{K}$ 배이다. 이때, $100K$ 의 값을 구하여라.
(단, $\log 0.213 = \bar{1}.328,\ \ \log 9.1 = 0.959$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 213

해설

용기의 현재 물의 양을 α 라 하면 8 일 후의 물의 양은 $\alpha(0.91)^8$ 이다.

$\alpha(0.91)^8 = \dfrac{1}{K}\alpha$ 에서 $\dfrac{1}{K} = (0.91)^8$

이때, $\log 0.91 = -1 + 0.959 = -0.041$ 이므로

$\log \dfrac{1}{K} = 8 \log 0.91 = -0.328$

$\therefore \log K = 0.328$

조건에서 $\log 0.213 = \bar{1}.328$ 이므로

$K = 2.13$

$\therefore 100K = 213$

12. 다음 중 값이 다른 것은?

① $(\sqrt{2})^{\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}$

② $\left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}}$

③ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}$

④ $\left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$

⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}$

해설

$$\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = \left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}} = \left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}}$$

① $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{8}}$

② $\left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = (2^{\frac{\sqrt{2}}{4}})^{\sqrt{2}}$
$= 2^{\frac{1}{2}}$

③ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

④ $\left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

13. 어떤 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다.
7회째 복사본에서 도형의 넓이는 4회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

① $\sqrt[7]{8}$ ② $\sqrt[5]{8}$ ③ $\sqrt[3]{8}$ ④ $\sqrt[5]{4}$ ⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A, 확대 배율을 a라 놓으면 5회째 복사본에서 도형의 넓이는
$A \cdot a^5$ 이므로 $A \cdot a^5 = 2A$ 에서 $a^5 = 2$
$\therefore a = \sqrt[5]{2}$
7회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$,
4회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$ 이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

14. 다음 식을 계산하면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$$\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\left[\sqrt[3]{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{125}\right]$$

① 405 ② 415 ③ 425 ④ 451 ⑤ 462

해설

$1 \le n < 8$ 이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=1$

$8 \le n < 27$ 이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=2$

$27 \le n < 64$ 이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=3$

$64 \le n < 125$ 이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=4$

$n = 125$ 이면 $\left[\sqrt[3]{n}\right]=5$

$\therefore \left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\left[\sqrt[3]{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{125}\right]$

$=1\times 7+2\times 19+3\times 37+4\times 61+5=405$

15. $3^x+3^y=5$, $x+y=1$일 때, $(3^x+1)(3^{2x}-3^x+1)+(3^y-1)(3^{2y}+3^y+1)$의 값은?

① 60　② 70　③ 80　④ 90　⑤ 100

해설

$$(3^x+1)(3^{2x}-3^x+1)+(3^y-1)(3^{2y}+3^y+1)$$
$$=(3^{3x}+1)+(3^{3y}-1)$$
$$=3^{3x}+3^{3y}$$
$$=(3^x+3^y)^3-3\cdot 3^x\cdot 3^y\cdot(3^x+3^y)$$
$$=(3^x+3^y)^3-3^{x+y+1}(3^x+3^y)$$
$$=5^3-3^2\cdot 5=80$$