1. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}}+\sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$를 간단히 하면?

① -4017 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 4017

해설

(준식)$=|-2014|+(-2015)=-1$

2. $\left(\dfrac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3} = \left(\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= (3^{2\sqrt{2}-3})^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= 3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$= 3^{8-9} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

3. $\log_2(\log_8 x) = -1$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{2}$

해설

$\log_2(\log_8 x) = -1$에서

$\log_8 x = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = 8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

4. $3^x = 2 + \sqrt{2}$, $3^y = 2 - \sqrt{2}$일 때, $x + y$의 값은?

① 1　　② $\log_4 3$　　③ $\log_3 2$

④ $\log_3 4$　　⑤ $\log_4 10$

해설

$x = \log_3(2 + \sqrt{2})$, $y = \log_3(2 - \sqrt{2})$이므로

$x + y = \log_3 \left\{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})\right\} = \log_3 2$

5. $A = \dfrac{\log_2(\log_2 3)}{\log_2 3}$ 일 때, 3^A 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\log_3 2$ ④ $\log_2 3$ ⑤ $3^{\log_2 3}$

해설

$$A = \frac{\log_2(\log_2 3)}{\log_2 3} = \log_3(\log_2 3)$$

$$3^A = 3^{\log_3(\log_2 3)} = \log_2 3$$

$$\therefore\ 3^A = \log_2 3$$

6. $\log_3 10$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^{α} 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{100}{9}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

해설

$\log_3 10 = 2 + \alpha \ (0 \leq \alpha < 1)$ 이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3 \frac{10}{9}$ 이 된다.

따라서 $3^{\alpha} = 3^{\log_3 \frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$ 이다.

7. $\log_3 2 = a$일 때, $\log_{\sqrt{12}} 9$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{2}{2a+1}$ ② $\dfrac{4}{2a+1}$ ③ $\dfrac{2}{a+1}$

④ $\dfrac{2}{a+2}$ ⑤ $\dfrac{4}{a+2}$

해설

$\log_{\sqrt{12}} 9$

$$= \frac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{12}} = \frac{2}{\frac{1}{2}\log_3(2^2 \cdot 3)}$$

$$= \frac{4}{2(\log_3 2 + 1)} = \frac{4}{2(a+1)} = \frac{2}{a+1}$$

8. 함수 $f(x)$에 대하여 $f(20^x) = \frac{1}{x} - \log_3 5$일 때, $f(3)$의 값은?

① 1　　② 3　　③ $2\log_3 2$

④ $2\log 35$　　⑤ $1 + \log_3 2$

해설

$20^x = 3$이라 하면 $x = \log_{20} 3$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{\log_{20} 3} - \log_3 5 \\ &= \log_3 20 - \log_3 5 \\ &= \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4 = 2\log_3 2 \end{aligned}$$

9. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80　② 4.04　③ 4.28　④ 4.32　⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고

$\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$

$= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$

$\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

10. 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 수열 $b_n = 2^{a_n}$이다. 수열 $\{b_n\}$에서 처음으로 2000보다 커지는 항은? (단, $\log 2 = 0.3010$)

① 제5항 ② 제6항 ③ 제7항

④ 제8항 ⑤ 제9항

해설

$a_n = 2n$이므로 $b_n = 2^{2n}$

$4^n > 2000$에서 $2n \log 2 > \log 2000$

$$\therefore\ n > \frac{3.3010}{0.6020} = 5.48 \times \times \times$$

따라서 제6항부터 처음으로 2000보다 커진다.

11. 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이 세 수의 평균은 8이고 분산이 6일 때, 곱 abc의 값은?

① 360 ② 384 ③ 400 ④ 440 ⑤ 510

해설

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$a = b - d$, $c = b + d$이므로

$$\frac{(b-d)+b+(b+d)}{3} = 8$$

$\therefore b = 8$

$\therefore a = 8 - d$, $b = 8$, $c = 8 + d$

세 수의 분산이 6이므로

$$\frac{(8-d-8)^2+(8-8)^2+(8+d-8)^2}{3} = 6$$

$\therefore d^2 = 9$, $d = \pm 3$

$\therefore a = 5$, $b = 8$, $c = 11$ 또는 $a = 11$, $b = 8$, $c = 5$

$\therefore abc = 440$

12. 공차가 $d_1(d_1 \neq 0)$ 인 등차수열

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \cdots$ 에 대하여 두 수열

$a_1+a_2,\ a_3+a_4,\ a_5+a_6,\ a_7+a_8,\cdots$

$a_1+a_2+a_3,\ a_4+a_5+a_6,\ a_7+a_8+a_9,\cdots$ 의 공차를 각각 d_2, d_3 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $2d_2=3d_3$　② $3d_2=2d_3$　③ $5d_2=2d_3$

④ $7d_2=3d_3$　⑤ $9d_2=4d_3$

해설

첫째 수열은 $2a_1+d_1,\ 2a_1+5d_1,\ 2a_1+9d_1,\ \cdots$ 이므로 공차가 $d_2=4d_1$ 이고

둘째 수열은 $3a_1+3d_1,\ 3a_1+12d_1,\ 3a_1+21d_1,\ \cdots$ 이므로 공차가 $d_3=9d_1$ 이다.

$\therefore\ 9d_2=4d_3$

13. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20,\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 68$ 일 때, 첫째항과 공차의 곱은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$$S_4 = \frac{4(2a+3d)}{2} = 20$$

$$S_8 - S_4 = \frac{8(2a+7d)}{2} - 20 = 68$$

$2a+3d=10,\ 2a+7d=22$

두 식을 변끼리 빼면

$4d=12,\quad d=3$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a \times d = \frac{3}{2}$$

14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = -n^2 + 5n + 6$일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$은 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

㉢ $a_n < 0$, $S_n > 0$을 동시에 만족하는 자연수 n의 개수는 2개이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $S_{n+1} - S_n = \{-(n+1)^2 + 5(n+1) + 6\} - (-n^2 + 5n + 6) = -2n + 4$

따라서 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$은 공차가 -2인 등차수열이다. (참)

㉡ $a_1 = S_1 = 10$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (-n^2 + 5n + 6) - \{-(n-1)^2 + 5(n-1) + 6\}$

$= -2n + 6$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $10,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4, \cdots$ 이므로 등차수열이 아니다. (거짓)

㉢ $a_n < 0$에서 $-2n + 6 < 0$, $n > 3$ ($\because\ a_1 = 10 > 0$)

$S_n > 0$에서 $-n^2 + 5n + 6 > 0$, $n^2 - 5n - 6 < 0$

$(n+1)(n-6) < 0$, $n < 6$

$\therefore\ 3 < n < 6$

즉, 자연수 n의 값은 $4,\ 5$의 2개이다.(참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

15. 이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 α, β의 등차중항, 양의 등비중항, 조화중항을 각각 A, G, H라 할 때, A, G, H의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $A > G > H$　② $A > H > G$　③ $G > A > H$

④ $H > G > A$　⑤ $H > A > G$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=2$

따라서

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$G=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{2}$$

$$H=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2\times 2}{6}=\frac{2}{3}$$

따라서 $A>G>H$이다.

16. 다항식 $f(x)=x^2+ax+3$을 일차식 x, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 순서대로 등비수열을 이룰 때, 상수 a의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=x^2+ax+3$을 일차식 x, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(0)=3$, $f(1)=4+a$, $f(2)=7+2a$이고, 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(4+a)^2=3(7+2a)$

$a^2+2a-5=0$

이때, a는 이 이차방정식의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 상수 a의 값의 합은 -2이다.

17. 서로 다른 세 수 a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루고 있다. b와 c 사이에 두 수를 넣어 5개의 수가 등차수열을 이루도록 하였다. 이때, $\dfrac{b+c}{a}$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

b와 c사이에 두 수를 넣어 만들어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$b=a+d,\ c=a+4d\cdots$㉠

세 수 a, b, c가 등비수열을 이루므로

$(a+d)^2=a(a+4d)$

$a^2+2ad+d^2=a^2+4ad$

$\therefore\ d=2a$

㉠에서 $b=3a,\ c=9a$

$\therefore\ \dfrac{b+c}{a}=\dfrac{3a+9a}{a}=12$

18. 다항식 $x^9+x^8+\cdots+x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

$f(x)=x^9+x^8+\cdots+x+1$이라 하면

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$이다.

즉, $f(2)=2^9+2^8+\cdots+2+1$

따라서 $f(2)$는 첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 10인 등비수열의 합과 같다.

$$\therefore f(2)=\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1023$$

19. 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_n + p\}$가 등비수열을 이루도록 하는 상수 p의 값은?

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2},\ S_n + p = \frac{3^n - 1 + 2p}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{2p-1}{2}$$

그런데 $S_n + p$가 등비수열을 이루므로

$$\frac{2p-1}{2} = 0 \quad \therefore\ p = \frac{1}{2}$$

20. $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2)$를 n에 관한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ② $\dfrac{n(n-1)}{3}$

③ $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ④ $\dfrac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$

⑤ $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

해설

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

$= \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$

$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

따라서 이 식에서 n 대신 $n-1$을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$$

21. $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(k-1)^3$ 의 값은?

① 2200 ② 2230 ③ 2270 ④ 2300 ⑤ 2330

해설

$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{10}(k-1)^3$

$= \sum_{k=1}^{10}\left\{(k+1)^3 - (k-1)^3\right\}$

$= \sum_{k=1}^{10}(6k^2+2) = 6 \times \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 20$

$= 2330$

22. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)=56$을 만족시키는 n의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)$

$=\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n}l^2+\sum_{l=1}^{n}l\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=56$이므로

$n(n+1)(n+2)=6\cdot7\cdot8$

$\therefore n=6$

23. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \cdots$ 의 첫째항부터 제 50까지의 합은?

① $\frac{48}{49}$ ② $\frac{50}{49}$ ③ $\frac{49}{50}$ ④ $\frac{51}{50}$ ⑤ $\frac{50}{51}$

해설

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

따라서, 이 수열의 첫째항부터 제 50항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{51}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$$

24. $a_n = 1,\ a_2 = 2+3,\ a_3 = 4+5+6,\ a_4 = 7+8+9+10, \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$의 제10항의 값은?

① 515 ② 511 ③ 508 ④ 505 ⑤ 502

해설

$a_1 = 1$

$a_2 = 2+3$

$a_3 = 4+5+6$

$a_4 = 7+8+9+10$

$\vdots$

과 같은 수열 $\{a_n\}$은 연속된 자연수의 합으로 이루어진 수열로 a_9까지의 연속된 수들의 개수의 합은

$\sum_{k=1}^{9} k = \dfrac{9 \times 10}{2} = 45$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 46+47+48+\cdots+55 \\ &= \frac{10(46+55)}{2} \\ &= 505 \end{aligned}$$

25. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = \frac{1}{a_n}$이라 할 때, $a_{15}b_{20}$의 값은?

① 3 ② 9 ③ 27 ④ 81 ⑤ 243

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \therefore\ b_n = 3^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{15}b_{20} = \frac{1}{3^{14}} \cdot 3^{19} = 3^5 = 243$$

26. $a_1 = -10$, $a_{n+1} = a_n + n^2$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{11}의 값은?

① 210 ② 275 ③ 310 ④ 375 ⑤ 425

해설

$a_{n+1} - a_n = f(n)$꼴이면 $f(n)$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열임을 이용한다.

$a_{n+1} = a_n + n^2$, $a_{n+1} - a_n = n^2$이므로

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $b_n = n^2$

$\therefore a_{11} = -10 + \sum_{k=1}^{10} k^2$

$$= -10 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 375$$

27. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 m, n에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_4 = 72$일 때, a_5의 값은?

① $72\sqrt{3}$ ② $72\sqrt{6}$ ③ 144

④ $144\sqrt{3}$ ⑤ 216

해설

$a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 2,\ n = 2$를 대입하면 $a_4 = 2a_2a_2 = 72,\ a_2^2 = 36$

$\therefore\ a_2 = 6(\because\ a_n > 0)$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 1,\ n = 1$을 대입하면

$a_2 = a_{1+1} = 2a_1a_1 = 6,\ a_1^2 = 3$

$\therefore\ a_1 = \sqrt{3}$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_m a_n$에 $m = 4,\ n = 4$를 대입하면

$a_5 = a_{4+1} = 2a_4a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

28. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
> 이므로 주어진 등식이 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
> $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
> 이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$
> $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$
> $= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

해설

(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

29. 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a+b=13$이다.

30. $x+x^{-1}=3$일 때, $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ 5 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$x+x^{-1}=3$이므로

$(x+x^{-1})^3=27$

$x^3+x^{-3}+3(x+x^{-1})=27$

$x^3+x^{-3}=27-3\cdot 3=18$

$(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}})^2=x^3+x^{-3}+2=20$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=2\sqrt{5}$ $(\because\ x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}>0)$

31. $20^a = 5\sqrt{3}$, $20^b = 2$ 일 때, $10^{\frac{2a}{1-b}}$ 의 값은?

① 25 ② 35 ③ 55 ④ 65 ⑤ 75

해설

주어진 조건과 같이 밑이 20 이 되도록 구하려는 식을 변형한다.

$$10 = \frac{20}{2} = \frac{20}{20^b} = 20^{1-b}$$

$$\therefore 10^{\frac{2a}{1-b}} = (20^{1-b})^{\frac{2a}{1-b}} = 20^{2a} = (20^a)^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$$

32. $\log \dfrac{x}{4.71} = 1.9812$를 만족하는 양수 x의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구하여라.

수	0	1	1	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	$\cdots$
4.6	.6628	.6737	.6647	.6656	$\cdots$
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 451

해설

$\log x$의 가수를 구하고, 가수가 같은 로그의 진수를 상용로그표에서 찾는다.

$\log \dfrac{x}{4.71} = \log x - \log 4.71 = \log x - 0.6730 = 1.9812$이므로

$\log x = 2.6542 = 2 + 0.6542$

로그표에서 $\log 4.51 = 0.6542$이므로 $x = 451$

33. $\log x$의 정수 부분이 4이고, $\log y$의 정수 부분이 2일 때, $\log \sqrt{xy}$의 정수 부분을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log x = 4 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$\log y = 2 + \beta \ (0 \le \beta < 1)$

$\log \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}(\log^x + \log^y)$

$= \dfrac{1}{2}(4 + \alpha + 2 + \beta)$

$= 3 + \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$0 \le \alpha < 1,\ 0 \le \beta < 1$이므로

$0 \le \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) < 1$

$\therefore \log^{\sqrt{xy}}$의 정수 부분은 3