

1. 다음 () 안에 알맞은 수는?

1, 5, 9, (), 17

- ① 10 ② 11 ③ 13 ④ 14 ⑤ 16

해설

나열된 각 수는 $4n + 1$ 의 꼴이다.
따라서 () 안에 들어갈 수는 $9 + 4 = 13$ 이다.

2. 첫째항이 8, 공차가 -7 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-7n + 1$

② $-7n + 15$

③ $-7n - 15$

④ $7n + 15$

⑤ $7n - 15$

해설

$$a_n = 8 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 15$$

3. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

- ☐ ㉠ 1, 4, 9, 16, 25,...
- ☐ ㉡ 3, 9, 27, 81, 243,...
- ☐ ㉢ 9, 99, 999, 9999, 99999,...
- ☐ ㉣ 2, 3, 4, 9, 8, 27
- ☐ ㉤ $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

- ☐ ① ㉠
- ☐ ② ㉠, ㉡
- ☐ ③ ㉡, ㉣
- ☒ ④ ㉡, ㉤
- ☐ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3인 등비수열이다.
㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

4. $\sum_{k=1}^{100} a_k = 10$, $\sum_{k=1}^{100} a_k^2 = 20$, 일 때, $\sum_{k=1}^{100} (a_k + 1)^2 + \sum_{k=1}^{100} (a_k - 2)^2$ 의 값은?

① 520 ② 540 ③ 560 ④ 580 ⑤ 600

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{100} (a_k + 1)^2 + \sum_{k=1}^{100} (a_k - 2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{100} (2a_k^2 - 2a_k + 5) \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{100} a_k^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{100} a_k + \sum_{k=1}^{100} 5 \\ &= 2 \cdot 20 - 2 \cdot 10 + 500 \\ &= 40 - 20 + 500 = 520 \end{aligned}$$

5. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$$

6. 수열 $-3, a, b, c, 13$ 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

$$a - (-3) = d$$

$$b - a = d$$

$$c - b = d$$

$$13 - c = d$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

$$\text{더하면 } 13 - (-3) = 4d \therefore d = 4$$

$$\therefore a = -3 + 4 = 1$$

$$b = 1 + 4 = 5$$

$$c = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

7. 제 4항이 6, 제 7항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

- ㉠ $\frac{1}{9}(3^{10} - 1)$ ㉡ $\frac{1}{10}(3^{10} - 1)$ ㉢ $\frac{1}{9}(3^{10} + 1)$
㉣ $\frac{1}{10}(3^{10} + 1)$ ㉤ $\frac{1}{9}(3^{11} - 1)$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = 6, ar^6 = 162$$

$$r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3, a = \frac{2}{9}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{9}(3^{10} - 1)$$

8. $\sum_{l=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \}$ 의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^5 (k+l) &= \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l \\ \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l+15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425\end{aligned}$$

9. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$

② $\frac{100}{101}$

③ $\frac{200}{201}$

④ $\frac{110}{101}$

⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

10. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 이 참이다.

(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ① 0, k

② 0, $k + 1$

③ 0, $k - 1$

④ 1, k

⑤ 1, $k + 1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ 이 참이다.

(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ 도 참이다.

11. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 11$, $a_{14} = -11$ 일 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 의 최댓값은?

① 56 ② 62 ③ 64 ④ 68 ⑤ 70

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = 11$ 에서 $a + 2d = 11 \cdots \textcircled{㉠}$

$a_{14} = -11$ 에서 $a + 13d = -11 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 15$

$\therefore a_n = 15 + (n - 1) \cdot (-2) = -2n + 17$

이때 S_n 이 최대가 되려면 양수인 항만 모두 더하면 되므로 $-2n + 17 > 0$ 에서

$$2n < 17 \quad \therefore n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n 의 최댓값은 S_8 이므로

$$S_8 = \frac{8\{2 \cdot 15 + 7 \cdot (-2)\}}{2} = 64$$

12. 수열 1, 101, 10101, 1010101, ... 에서 제100 항은?

- ① $\frac{10^{200} - 1}{99}$ ② $\frac{10^{202} - 1}{99}$ ③ $10^{201} - 1$
 ④ $\frac{10^{402} - 1}{99}$ ⑤ $10^{401} - 1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10^2 + 1$$

$$a_3 = 10^4 + 10^2 + 1$$

⋮

$$a_n = 10^{2(n-1)} + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1$$

$$= \frac{1 \{ (10^2)^n - 1 \}}{10^2 - 1} = \frac{1}{99} (10^{2n} - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{1}{99} (10^{200} - 1)$$

13. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① $3 - 2^{12}$

② $3 - 2^{11}$

③ $3 - 2^{10}$

④ $3 - 2^9$

⑤ $3 - 2^8$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$ 의 양변에 -3 을 더하여 정리하면

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 - 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 3 - 2^9$$

14. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $a_{200} - a_{100}$ 의 값은?

$$a_n = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

- ① $2^{200} - 1$

② $2^{200} - 2$

③ $2^{200} - 100$

④ $2^{199} - 2^{99}$

⑤ $2^{200} - 2^{100}$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \cdot 2^{n-1} \\ a_{200} &= 2^{199} \\ a_{100} &= 2^{99} \\ \therefore a_{200} - a_{100} &= 2^{199} - 2^{99} \end{aligned}$$

15. 수열 $\{A_n\}$ 을 다음과 같이 정의한다.

- ㉠ 임의의 자연수 k 에 대하여 $A_{\frac{k(k+1)}{2}} = k$

㉡ ㉠에서 정해지지 않은 모든 항은 1이다.

이때, $A_m = 10$ 을 만족시키는 자연수 m 에 대하여 $\sum_{k=1}^m A_k$ 의 값은?

- ① 92
- ② 94
- ③ 96
- ④ 98
- ⑤ 100

해설

$k = 1$ 일 때 $A_1 = 1$,
 $k = 2$ 일 때 $A_3 = 2$,
 $k = 3$ 일 때 $A_6 = 3$,
 $k = 4$ 일 때 $A_{10} = 4$,
 $k = 5$ 일 때 $A_{15} = 5, \dots$ 이므로
수열 $\{A_n\}$ 의 각 항은 다음과 같다.
1. 1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 5, $\dots$
즉, 자연수 n 과 $n + 1$ 사이에 n 개의 1이 있는 수열이다.
따라서 $A_m = 10$ 을 만족하는 자연수 m 에 대하여 $\sum_{k=1}^m A_k$ 는
1부터 10까지의 자연수의 합과 $(1 + 2 + 3 + \dots + 9)$ 개의 1과의
합이다.
 $\sum_{k=1}^m A_k = (1 + 2 + 3 + \dots + 10) + (1 + 2 + 3 + \dots + 9)$
 $\qquad\qquad = 55 + 45 = 100$