1. 다음 (　　) 안에 알맞은 수는?

1, 5, 9, (　　), 17

① 10　② 11　③ 13　④ 14　⑤ 16

해설

나열된 각 수는 $4n+1$의 꼴이다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수는 $9+4=13$이다.

2. 첫째항이 8, 공차가 -7인 등차수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $-7n+1$　　② $-7n+15$　　③ $-7n-15$

④ $7n+15$　　⑤ $7n-15$

해설

$a_n = 8 + (n-1)\cdot(-7) = -7n+15$

3. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

㉠ $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \cdots$
㉡ $3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243, \cdots$
㉢ $9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ 99999, \cdots$
㉣ $2,\ 3,\ 4,\ 9,\ 8,\ 27$
㉤ $\frac{4}{9},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{4}, \cdots$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉤　⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3 인 등비수열이다.

㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

4. $\sum_{k=1}^{100} a_k = 10$, $\sum_{k=1}^{100} a_k^2 = 20$, 일 때, $\sum_{k=1}^{100}(a_k+1)^2+\sum_{k=1}^{100}(a_k-2)^2$ 의 값은?

① 520 ② 540 ③ 560 ④ 580 ⑤ 600

해설

$\sum_{k=1}^{100}(a_k+1)^2+\sum_{k=1}^{100}(a_k-2)^2$

$= \sum_{k=1}^{100}(2a_k^2-2a_k+5)$

$= 2\cdot\sum_{k=1}^{100} a_k^2 - 2\cdot\sum_{k=1}^{100} a_k + \sum_{k=1}^{100} 5$

$= 2\cdot 20 - 2\cdot 10 + 500$

$= 40 - 20 + 500 = 520$

5. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$

6. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$ 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$

$b-a=d$

$c-b=d$

$13-c=d$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

더하면 $13-(-3)=4d \quad \therefore d=4$

$\therefore a=-3+4=1$

$b=1+4=5$

$c=5+4=9$

$\therefore a+b+c=15$

7. 제 4항이 6, 제 7항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(3^{10}-1)$ ② $\frac{1}{10}(3^{10}-1)$ ③ $\frac{1}{9}(3^{10}+1)$

④ $\frac{1}{10}(3^{10}+1)$ ⑤ $\frac{1}{9}(3^{11}-1)$

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$ar^3=6,\ ar^6=162$

$r^3=27$

$\therefore\ r=3,\ a=\frac{2}{9}$

$$S_n=\frac{\frac{2}{9}\cdot(3^{10}-1)}{3-1}=\frac{1}{9}(3^{10}-1)$$

8. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400 ② 425 ③ 450 ④ 475 ⑤ 500

해설

$$\sum_{l=1}^{5}(k+l)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}l=\sum_{k=1}^{5}k+5l$$

$$\therefore (\text{준 식}) = \sum_{l=1}^{10}(5l+15)=5\sum_{l=1}^{10}l+150$$

$$=5\times 55+150=425$$

9. $\sum_{k=1}^{200} \dfrac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\dfrac{101}{100}$　② $\dfrac{100}{101}$　③ $\dfrac{200}{201}$　④ $\dfrac{110}{101}$　⑤ $\dfrac{201}{200}$

해설

$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

10. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{(가)})$이 참이다.
(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(가)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k　② 0, $k+1$　③ 0, $k-1$
④ 1, k　⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.
(i) $P(\boxed{1})$이 참이다.
(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{k+1})$도 참이다.

11. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 11$, $a_{14} = -11$일 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n의 최댓값은?

① 56 ② 62 ③ 64 ④ 68 ⑤ 70

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_3 = 11$에서
$a + 2d = 11 \cdots$ ㉠
$a_{14} = -11$에서 $a + 13d = -11 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 15$
$\therefore\ a_n = 15 + (n-1)\cdot(-2) = -2n + 17$
이때 S_n이 최대가 되려면 양수인 항만 모두 더하면 되므로
$-2n + 17 > 0$에서

$$2n < 17 \quad \therefore\ n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n의 최댓값은 S_8이므로

$$S_8 = \frac{8\{2\cdot 15 + 7\cdot(-2)\}}{2} = 64$$

12. 수열 1, 101, 10101, 1010101, $\cdots$ 에서 제100항은?

① $\dfrac{10^{200}-1}{99}$ ② $\dfrac{10^{202}-1}{99}$ ③ $10^{201}-1$
④ $\dfrac{10^{402}-1}{99}$ ⑤ $10^{401}-1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 10^2 + 1$$
$$a_3 = 10^4 + 10^2 + 1$$
$$\vdots$$
$$a_n = 10^{2(n-1)} + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1$$
$$= \frac{1\left\{(10^2)^n - 1\right\}}{10^2 - 1} = \frac{1}{99}(10^{2n} - 1)$$
$$\therefore\ a_{100} = \frac{1}{99}(10^{200} - 1)$$

13. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $3 - 2^{12}$ ② $3 - 2^{11}$ ③ $3 - 2^{10}$

④ $3 - 2^{9}$ ⑤ $3 - 2^{8}$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$의 양변에 -3을 더하여 정리하면

$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 3 - 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 3 - 2^{9}$

14. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같을 때, $a_{200} - a_{100}$ 의 값은?

$$a_n = 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \cdots$$

① $2^{200} - 1$ ② $2^{200} - 2$ ③ $2^{200} - 100$

④ $2^{199} - 2^{99}$ ⑤ $2^{200} - 2^{100}$

해설

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$

$a_{200} = 2^{199}$

$a_{100} = 2^{99}$

$\therefore a_{200} - a_{100} = 2^{199} - 2^{99}$

15. 수열 $\{A_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

㉠ 임의의 자연수 k에 대하여 $A_{\frac{k(k+1)}{2}} = k$
㉡ ㉠에서 정해지지 않은 모든 항은 1이다.

이때, $A_m = 10$을 만족시키는 자연수 m에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} A_k$의 값은?

① 92 ② 94 ③ 96 ④ 98 ⑤ 100

해설

$k=1$일 때 $A_1 = 1$,
$k=2$일 때 $A_3 = 2$,
$k=3$일 때 $A_6 = 3$,
$k=4$일 때 $A_{10} = 4$,
$k=5$일 때 $A_{15} = 5, \cdots$ 이므로
수열 $\{A_n\}$의 각 항은 다음과 같다.
$1.\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, 5, \cdots$
즉, 자연수 n과 $n+1$사이에 n개의 1이 있는 수열이다.
따라서 $A_m = 10$을 만족하는 자연수 m에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} A_k$는 1부터 10까지의 자연수의 합과 $(1+2+3+\cdots+9)$개의 1과의 합이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} A_k &= (1+2+3+\cdots+10)+(1+2+3+\cdots+9)\\ &= 55+45=100\end{aligned}$$