1. 양수 x, y에 대하여 $\sqrt{2}+1$, x, $\sqrt{2}-1$, y가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x+y$의 값은?

① $-2\sqrt{2}$ ② $1-2\sqrt{2}$ ③ $4-2\sqrt{2}$

④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{2}$

해설

x는 $\sqrt{2}+1$과 $\sqrt{2}-1$의 등비중항이므로

$x^2=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$이므로

$\therefore\ x=1$ ($\because\ x>0$)

따라서 이 수열의 공비는 $\sqrt{2}-1$이므로

$y=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

$\therefore\ x+y=4-\sqrt{2}$

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$

$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$

$= 16$

3. $x \geq 0$일 때, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$를 간단히 하면?

① $x\sqrt{x}$ ② $x\sqrt[4]{x}$ ③ $\sqrt[8]{x}$ ④ $\sqrt[8]{x^3}$ ⑤ $8\sqrt{x^7}$

해설

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$$

$$= \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}$$

$$= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}}$$

4. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7}{a^{-3}+a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}+a^{-9}}$$

① a^8 ② a^9 ③ a^{10} ④ a^{11} ⑤ a^{12}

해설

분자, 분모에 a^{10}을 곱하면

$$\frac{a^{10}\times(a+a^2+\cdots+a^7)}{a^7+a^6+\cdots+a^2+a}=a^{10}$$

5. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$　　㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$

$\therefore$ 참

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$　$\therefore$ 거짓

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}}$　$\therefore$ 거짓

6. $a = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$, $b = \dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$ 일 때, $\sqrt[6]{24}$를 a, b로 나타낸 것은?

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$ ④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

해설

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},\ b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt[6]{24} &= \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{3} \\ &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

7. $\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{8}$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{8}$에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

8. $x = \dfrac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x과 같은 것은?

① a ② b ③ a^b ④ b^2 ⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \dfrac{\dfrac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\dfrac{\log_b b}{\log_b a}} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$

9. $5^a = 2,\ 5^b = 3$이라 할 때, $\log_6 72$를 a와 b의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\dfrac{a+b}{a-b}$ ② $\dfrac{2a+b}{b-a}$ ③ $\dfrac{2a-b}{a+b}$

④ $\dfrac{2a+b}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{3a+2b}{a+b}$

해설

$a = \log_5 2,\ \ b = \log_5 3$

$$\log_6 72 = \frac{3\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a+2b}{a+b}$$

10. $\log 80$ 의 정수 부분을 n, 소수 부분을 a 라 할 때, $10^n + 10^a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$\log 80 = \log(10 \times 8) = 1 + \log 8$ 에서

$0 < \log 8 < 1$ 이므로

$\log 80$ 의 정수 부분은 1 이고 소수 부분은 $\log 8$ 이다.

즉 $n = 1, a = \log 8$ 이므로

$10^n + 10^a = 10 + 10^{\log 8} = 10 + 8 = 18$

11. 1과 10 사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10},\ 10$

$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20},\ 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$의 값은?

① $\dfrac{10}{21}$ ② $\dfrac{11}{21}$ ③ $\dfrac{20}{11}$ ④ $\dfrac{21}{11}$ ⑤ 2

해설

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10},\ 10$의 공차를 p라 하면 $1+11p=10 \Rightarrow$

$p=\dfrac{9}{11}$

$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20},\ 10$의 공차를 q라 하면 $1+21q=10 \Rightarrow$

$q=\dfrac{9}{21}$

$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}=\frac{9p}{9q}=\frac{p}{q}=\frac{\frac{9}{11}}{\frac{9}{21}}=\frac{21}{11}$$

12. 첫째항이 $-\frac{5}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n 이 최소가 되게 하는 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

첫째항이 $-\frac{5}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = -\frac{5}{2} + (n+1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3} - \frac{17}{6}$

이때, S_n 이 최소가 되려면 음수인 항만 더하면 되므로

$\frac{n}{3} - \frac{17}{6} < 0 \quad \therefore \; n < \frac{17}{2} = 8.5$

따라서 S_n 이 최소가 되게 하는 n 의 값은 8이다.

13. 첫째항이 3이고, 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + pn$인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 할 때, $p+d$의 값은? (단, p는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$S_n = n^2 + pn$

$S_{n-1} = (n-1)^2 + p(n-1)$

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

$= n^2 + pn - (n^2 - 2n + 1 + pn - p)$

$= 2n - 1 + p \rightarrow d = 2$

$a_1 = 1^2 + p = 3$

$p = 2$

$\therefore p + d = 2 + 2 = 4$

14. 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n = n^2 + 3n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_5 + a_{10}$의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

해설

주어진 수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구한다.

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\}$

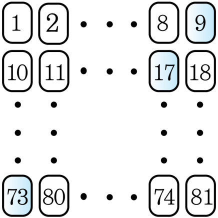
$= 2n + 2 \cdots\cdots$ ㉠

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = 2n + 2$

$\therefore a_1 + a_5 + a_{10} = 4 + 12 + 22 = 38$

15. 1부터 81까지 쓰여진 카드를 오른쪽 그림과 같이 배열하였다. 이때 오른쪽 대각선 방향(/)으로 배열된 카드에 쓰여진 수들의 합은?



① 367 ② 369 ③ 371

④ 373 ⑤ 375

해설

구하는 수열은 9, 17, 25, $\cdots$, 73으로 공차가 8인 등차수열이다.

따라서, 구하는 합은 $\dfrac{9(9+73)}{2}=369$이다.

16. 2와 162사이에 세 양수 a, b, c를 넣어 $2, a, b, c, 162$가 이 순서대로 등비수열을 이루게 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$b^2 = 2 \times 162$

$b = 18 \quad (\because b > 0)$

$2, a, 18, c, 162$가 등비수열을 이루므로

$a^2 = 2 \times 18$

$a = 6 \quad (\because a > 0)$

$c^2 = 18 \times 162$

$c = 54$

$\therefore a + b = c = 6 + 18 + 54 = 78$

17. 다항식 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2014}$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는?

① $2^{2014} - 1$ ② $2^{2014} + 1$ ③ $2^{2015} - 1$

④ $2^{2015} + 1$ ⑤ 2^{2015}

해설

$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2014}$ 을 $x - 2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이므로

$$f(2) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2014} = \frac{2^{2015} - 1}{2 - 1} = 2^{2015} - 1$$

18. $\sum_{k=1}^{4}(k^3-k^2)$ 의 값은?

① 50　② 60　③ 70　④ 80　⑤ 90

해설

$$\sum_{k=1}^{4}(k^3-k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{4}k^3-\sum_{k=1}^{4}k^2$$
$$=\left(\frac{4\cdot5}{2}\right)^2-\frac{4\cdot5\cdot9}{6}$$
$$=100-30=70$$

19. 100차 방정식 $x^{100}-5x-2=0$의 근을 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{100}이라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} x_k^{100}$의 값은?

① 100 ② 125 ③ 200 ④ 225 ⑤ 325

해설

$x^{100}=5x+2$에서 x에 모든 근을 대입해 보면

$x_k^{100}=5x_k+2$

또한 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 100차 방정식의 모든 근의 합은 0이므로 $\sum_{k=1}^{100} x_k$의 값은 0이다.

따라서

$\sum_{k=1}^{100} x_k^{100}=\sum_{k=1}^{100}(5x_k+2)$

$=5\sum_{k=1}^{100} x_k+\sum_{k=1}^{100} 2=200$

20. 등차수열 2, 5, 8, $\cdots$, 68 의 합을 기호 $\sum$를 써서 나타내면 $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$ 이다. 이때 상수 a, b, n의 합 $a+b+n$의 값은? (단,n은 자연수이다.)

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

해설

주어진 등차수열은 첫째항이 2, 공차가 3 이므로 일반항 a_n 은

$a_n = 2+(n-1)\cdot 3 = 3n-1$

이때, $3n-1 = 68$ 에서

$3n = 69 \quad \therefore n = 23$

즉, $2+5+8+\cdots+68 = \sum_{k=1}^{23}(3k-1)$

$\therefore a = 3,\ b = -1,\ n = 23$

$\therefore a+b+n = 3-1+23 = 25$

21. 이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(\alpha-k)(\beta-k)$의 값은?

① 215 ② 225 ③ 235 ④ 245 ⑤ 255

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-5$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(\alpha-k)(\beta-k)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-5)$

$$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\times\frac{10\cdot 11}{2}-50=225$$

22. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$　② $\dfrac{2n}{n+1}$　③ $\dfrac{n}{2n+1}$

④ $\dfrac{n}{n+2}$　⑤ $\dfrac{2n}{2n+1}$

해설

(준 식)$= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$$

23. $a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\ (n \geq 1)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$ 의 값은?

① $2^{10} + 6$ ② $2^{10} + 0$ ③ $2^{10} + 18$

④ $2^{11} + 9$ ⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$ 꼴로 변형하면

$a_{n+2} - (1 + P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$

즉, $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$ 이고 공비가 2 인 등비수열이다.

$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \dfrac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10$

$= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18$

24. 두 수열 a_n, b_n에 대하여 $b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이 성립한다. $b_n = 3^{n(n+1)}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{100} \dfrac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$ 의 값은?

① $\dfrac{5}{33}$ ② $\dfrac{25}{99}$ ③ $\dfrac{15}{101}$ ④ $\dfrac{25}{101}$ ⑤ $\dfrac{35}{101}$

해설

$b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이므로

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{3^{n(n+1)}}{3^{(n-1)n}} = 3^{2n}$$

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\log_3 a_k \cdot \log_3 a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\log_3 3^{2k} \cdot \log_3 3^{2k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k \cdot 2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{101} \right)$$

25. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1}$의 값은?

① $\dfrac{1}{11}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{9}{10}$ ④ $\dfrac{10}{11}$ ⑤ 1

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$의 양변의 역수를 취하면

$\dfrac{a_n + 1}{a_{n+1}}$ $\therefore\ b_{n+1} = b_n + 1$

따라서, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$, 공차가 1인 등비수열이므로

$b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore\ a_n = \dfrac{1}{n}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} = \sum_{k=1}^{10} \dfrac{1}{k(k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{10} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$

26. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{\quad}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{\quad}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $2k+1$ ② $2k-1$ ③ $2k$
④ $k+1$ ⑤ $k-1$

해설

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

27. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x의 범위는?

① $-1 < x < 3$　　② $0 > x$　　③ $2 < x < 5$

④ $3 < x < 4$　　⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x-3>0, x-3 \neq 1$

따라서 $x>3, x \neq 4 \cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+6x-8>0$

$x^2-6x+8<0$

$(x-2)(x-4)<0$

따라서 $2<x<4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $3<x<4$

28. $\log_{10}(1+1)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

(준식)$=\log_{10}2+\log_{10}\frac{3}{2}+\log_{10}\frac{4}{3}+\cdots+\log_{10}\frac{100}{99}$

$=\log_{10}\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)$

$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=2\log_{10}10=2$

29. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}+\log_2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\ (\text{단, } x>1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}+\log_2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$$
$$=\log_2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$$
$$=\log_2\{(x+1)-(x-1)\}=\log_2 2=1$$

30. $\log 5.36 = 0.7292$, $\log 1.959 = 0.2920$일 때, 0.536^{10}는?

① 0.1959　② 0.01959　③ 0.001959

④ 0.00292　⑤ 0.005364

해설

$$\log 0.536^{10}$$
$$= 10\log 0.536 = 10\log\frac{5.36}{10}$$
$$= 10(\log 5.36 - 1) = 10(0.7292 - 1)$$
$$= -2.708 = -3 + (1 - 0.708)$$
$$= -3 + 0.292 = -3 + \log 1.959$$
$$= \log\frac{1}{1000} + \log 1.959$$
$$= \log 0.001959$$

31. 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2일 때, 등식 $\log \frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$을 만족하는 자연수 n의 개수는?

① 56　　② 57　　③ 58　　④ 59　　⑤ 60

해설

$\log \frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$에서

$\log A - \log 2 = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$

$\log A = \log 2 + 2\log 2\sqrt{2} + \log n = \log 2 + \log 8 + \log n = \log 16n$

$A = 16n$

그런데, 양수 A의 상용로그의 정수 부분이 2이므로

$2 \le \log A < 3, 10^2 \le A < 10^3$

$\therefore 100 \le 16n < 1000$

$6.25 \le n < 62.5$

따라서 자연수 n의 개수는 $62 - 6 = 56$이다.

32. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\log_2(S_n + k) = n$이다. 이때, 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되게 하는 상수 k의 값을 정하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$\log_2(S_n + k) = n$에서

$S_n + k = 2^n \quad \therefore\ S_n = 2^n - k$

(i) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2^1 - k = 2 - k$

(ii) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - k) - (2^{n-1} - k)$

$= 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1}$

따라서 수열 $a_2,\ a_3,\ a_4, \cdots$ 는 공비가 2인 등비수열이다.

(i), (ii)로부터 수열 $2 - k,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$이 등비수열이 되어야 하므로

$2 - k = 1 \quad \therefore\ k = 1$

33. 어떤 용기에 있는 물의 양은 전날 같은 시각의 물의 양의 9% 만큼 줄어든다고 한다. 이와 같은 비율로 물의 양이 줄어들 때, 8 일이 지난 후의 물의 양은 처음 양의 $\dfrac{1}{K}$ 배이다. 이때, $100K$ 의 값을 구하여라.
(단, $\log 0.213 = \bar{1}.328$, $\log 9.1 = 0.959$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 213

해설

용기의 현재 물의 양을 α 라 하면 8 일 후의 물의 양은 $\alpha(0.91)^8$ 이다.

$\alpha(0.91)^8 = \dfrac{1}{K}\alpha$ 에서 $\dfrac{1}{K} = (0.91)^8$

이때, $\log 0.91 = -1 + 0.959 = -0.041$ 이므로

$\log \dfrac{1}{K} = 8 \log 0.91 = -0.328$

$\therefore \log K = 0.328$

조건에서 $\log 0.213 = \bar{1}.328$ 이므로

$K = 2.13$

$\therefore 100K = 213$