

1. 다음 ()안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{9}, (\quad), \frac{\sqrt{11}}{25}$$

- ① $\frac{\sqrt{7}}{12}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$
- ③ $\frac{3}{16}$
- ④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$
- ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$ 의 규칙으로 나타난다.
따라서 ()안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$ 이다.
분모는 +1이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.
따라서 ()안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2 = 16$ 이므로 ()
안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

2. 등차수열 $10, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, -390$ 에서 공차는?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} b_1 &= 10, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots, \\ b_{100} &= a_{99}, b_{101} = -390 \\ \therefore b_{101} &= 10 + (101 - 1) \cdot d = -390 \\ 100d &= -400 \\ \therefore d &= -4 \end{aligned}$$

3. $a, -6, b, -12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

b 는 -6 과 -12 의 등차중항이므로

$$b = \frac{-6 + (-12)}{2} = -9$$

따라서 이 수열은 공차가 -3 인 등차수열이다.

$$a + (-3) = -6 \text{에서 } a = -3$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$$

4. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \therefore (가) = \frac{3}{2}$

5. 제 3 항이 12이고 제 6 항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = 12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2$$

$$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

6. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은? (단, 공비는 실수)

- ① 3^9
- ② $2 \cdot 3^9$
- ③ 3^{10}
- ④ $2 \cdot 3^{10}$
- ⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_2 = ar = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $a_5 = ar^4 = 162 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a = 2, r = 3$
따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$

7. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{n}{2n+1}$

④ $\frac{n}{n+2}$

⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{준 식)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right\} + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

8. 다음 수열의 □안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \square, \square \dots$

- ① $\frac{4}{21}$
- ② $\frac{8}{21}$
- ③ $\frac{10}{21}$
- ④ $\frac{14}{21}$
- ⑤ $\frac{16}{21}$

해설

균으로 나눠 보면
 $\frac{1}{1}/\frac{1}{3}, \frac{2}{2}/\frac{3}{1}, \frac{1}{5}/\frac{2}{4}, \frac{3}{3}/\frac{4}{2}, \frac{5}{1}/$
따라서 $\frac{1}{7}, \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.
 $\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$

9. 두 수 $2p+7$ 과 $2p+9$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p+7$, p^2 , $2p+9$ 가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$$2p^2 = 4p + 16, p^2 - 2p - 8 = 0$$

$$(p+2)(p-4) = 0$$

따라서 $p = -2$ 또는 $p = 4$

이때, p 는 양수이므로 $p = 4$

10. x 에 대한 이차다항식 $f(x) = a^2(x-1)^2 + 3a(x+1) + 2$ 를 $x-1$, $x+1$, $x+2$ 로 나눈 나머지가 이 순서대로 등차수열이 될 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} f(1) &= 6a + 2 \\ f(-1) &= 4a^2 + 2 \\ f(-2) &= 9a^2 - 3a + 2 \\ 4a^2 + 2 &= \frac{(6a + 2) + (9a^2 - 3a + 2)}{2} \\ 8a^2 + 4 &= 9a^2 + 3a + 4 \\ a^2 + 3a &= 0 \\ a &= 0, -3 \\ \text{그런데 } f(x) \text{ 는 이차식이므로 } a &\neq 0 \\ \therefore a &= -3 \end{aligned}$$

11. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$$a = 35 \div 9 \text{ } \therefore \text{ } d = -9$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$= \frac{10(70 - 81)}{2}$$

$$= \frac{-110}{2} = -55$$

12. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = -n^2 + 2n$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -280

해설

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) \\ &= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10) \\ &= -360 - (-80) = -280 \end{aligned}$$

13. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 2n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 + a_4 + a_6$ 의 값은?

① 25

② 26

③ 27

④ 28

⑤ 29

해설

$$S_n = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

$$S_{n-1} = (n - 1 + 1)^2 = n^2$$

$$a_n = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \quad (n \geq 2)$$

$$a_2 + a_4 + a_6 = 5 + 9 + 13 = 27$$

14. 8과 27사이에 두 수 x, y 를 넣었더니 8, $x, y, 27$ 이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8, $x, y, 27$ 이 등비수열이므로

$$a_1 = 8$$

$$a_4 = a_1 r^3 = 27, \quad 8r^3 = 27$$

$$r^3 = \frac{27}{8}, \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$x = a_1 r = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

$$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$$

$$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$$

15. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 = 96$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120$ 일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

① 127 ② 136 ③ 148 ④ 156 ⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = 96 \text{에서 } a + ar = 96 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120 \text{에서 } 96 + a_3 + a_4 = 120$$

즉, $a_3 + a_4 = 24$ 이므로

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 &= ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) \\ &= 96r^2 = 24 \end{aligned}$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{2}a = 96 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\} = 128 - 1 = 127$$

16. $S = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k + \sum_{k=10}^{10} k$ 일 때, $\frac{1}{5}S$

의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 77

해설

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k + \sum_{k=10}^{10} k \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 10 \\ &= 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 10^2 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \\ \therefore \frac{1}{5}S &= 77 \end{aligned}$$

17. 다음을 계산하여라.

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 1155 - 110 \\ &= 1045 \end{aligned}$$

18. $\sum_{k=1}^{50} \sqrt{(2k+1) - 2\sqrt{k(k+1)}}$ 의 값을 α 라 할 때, 자연수 n 에 대하여 $n < \alpha < n+1$ 이 성립한다. 이때 n 의 값은?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{50} \sqrt{(2k+1) - 2\sqrt{k(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{50} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{51} - \sqrt{50}) \\ &= \sqrt{51} - 1 \\ &7 < \sqrt{51} < 8 \text{ 이므로 } 6 < \sqrt{51} - 1 < 7 \\ &\therefore n = 6 \end{aligned}$$

19. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+2015}$ 의 값은?

- ① $\frac{2014}{2015}$ ② $\frac{2015}{2016}$ ③ $\frac{2015}{1008}$ ④ $\frac{2014}{1008}$ ⑤ 2

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \text{ 이므로}$$

$$(\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^{2015} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{2015} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2016} \right) = \frac{2 \times 2015}{2016} = \frac{2015}{1008}$$

20. 수열 $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, \dots$ 의 계차수열을 $\{a_n\}$ 이라고 할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^n b_k$ 를 나타내는 식은?

① n^2

② $n^2 + 2$

③ $n^2 + n + 1$

④ $n^2 + 2n$

⑤ $n^2 + 2n + 3$

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 $3, 5, 7, 9, \dots$ 이므로

$$b_n = 2n + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (2k + 1)$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= n^2 + 2n$$

21. $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ 이고,
 $a_{2n+2} = a_{2n} + 1$, $a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의된
수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 의 값은?

① 490 ② 495 ③ 500 ④ 505 ⑤ 510

해설

$a_{2n+2} = a_{2n} + 1$, $a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 에서 수열 $\{a_n\}$ 의 홀수 번째 항들은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이고, 짝수 번째 항들은 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{30} a_k &= (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{29}) \\ &+ (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30}) \\ &= \frac{15(2 \cdot 2 + 14 \cdot 3)}{2} + \frac{15(2 \cdot 3 + 14 \cdot 1)}{2} \\ &= 495 \end{aligned}$$

22. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 값은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$$

23. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n(n \geq 1)$ 으로 정의할 때, a_{100} 의 값은?
- ① 9900

② 9902

③ 9904

④ 10100

⑤ 10102

해설

$$a_1 = 2$$
$$a_{n+1} = a_n + 2n \text{의 양변에 } n = 1, 2, 3, \dots, 99 \text{를 대입하여}$$
$$\text{변끼리 더하면}$$
$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1$$
$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 2$$
$$\vdots$$
$$+) a_{100} = a_{99} + 2 \cdot 99$$
$$a_{100} = 2 + 2(1 + 2 + \dots + 99)$$
$$= 2 + 99 \cdot 100$$
$$= 9902$$

24. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① $3 - 2^{12}$

② $3 - 2^{11}$

③ $3 - 2^{10}$

④ $3 - 2^9$

⑤ $3 - 2^8$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$ 의 양변에 -3 을 더하여 정리하면

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 - 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 3 - 2^9$$

25. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉞]에 알맞은 것은?

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= 3$, (우변) $= 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 식이 성립한다고 가정하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = k^2 + 2k \cdots \cdots$ ㉠ 이다.
㉠의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3) = k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$
이므로 [㉞]일 때에도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

- ① $n = -k + 1$ ② $n = -k + 2$ ③ $n = k + 1$
- ④ $n = k + 2$ ⑤ $n = 2k + 1$

해설

㉞의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3)$
 $= k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$
이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.