1. 다음 (　　) 안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1},\ \frac{\sqrt{5}}{4},\ \frac{\sqrt{7}}{9},\ (\qquad),\ \frac{\sqrt{11}}{25}$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$　② $\frac{\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$　⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$ 의 규칙으로 나타난다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$ 이다.
분모는 $+1$ 이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2 = 16$ 이므로 (　) 안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

2. 등차수열 10, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{99}, -390에서 공차는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$b_1 = 10,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_2,\ \cdots,$

$b_{100} = a_{99},\quad b_{101} = -390$

$\therefore\ b_{101} = 10 + (101-1)\cdot d = -390$

$100d = -400$

$\therefore\ d = -4$

3. a, -6, b, -12가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

b는 -6과 -12의 등차중항이므로

$$b = \frac{-6 + (-12)}{2} = -9$$

따라서 이 수열은 공차가 -3인 등차수열이다.

$a + (-3) = -6$에서 $a = -3$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$$

4. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가)에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(가)}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(가)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ $\therefore$ $(가)=\frac{3}{2}$

5. 제 3항이 12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$ ② $(-3) \cdot 2^{n-1}$ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$ ⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = -8$

$\therefore r = -2$

$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

6. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은? (단, 공비는 실수)

① 3^9 ② $2 \cdot 3^9$ ③ 3^{10}

④ $2 \cdot 3^{10}$ ⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2 = ar = 6 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_5 = ar^4 = 162 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 2, \ r = 3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$

7. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$ ② $\dfrac{2n}{n+1}$ ③ $\dfrac{n}{2n+1}$

④ $\dfrac{n}{n+2}$ ⑤ $\dfrac{2n}{2n+1}$

해설

준 식) $= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right\}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)\right\} + \cdots +$

$\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$= \dfrac{n}{2n+1}$

8. 다음 수열의 $\square$안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \square, \square \cdots$$

① $\frac{4}{21}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{10}{21}$ ④ $\frac{14}{21}$ ⑤ $\frac{16}{21}$

해설

군으로 나눠 보면

$$\frac{1}{1} / \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} / \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1} /$$

따라서 $\frac{1}{7}, \frac{2}{6}$가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$$

9. 두 수 $2p+7$과 $2p+9$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p + 7,\ p^2,\ 2p + 9$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$2p^2 = 4p + 16,\ p^2 - 2p - 8 = 0$

$(p+2)(p-4) = 0$

따라서 $p = -2$ 또는 $p = 4$

이때, p는 양수이므로 $p = 4$

10. x에 대한 이차다항식 $f(x)=a^2(x-1)^2+3a(x+1)+2$를 $x-1$, $x+1$, $x+2$로 나눈 나머지들이 이 순서대로 등차수열이 될 때, 상수 a의 값은?

① -3　② -1　③ 2　④ 5　⑤ 7

해설

$f(1)=6a+2$

$f(-1)=4a^2+2$

$f(-2)=9a^2-3a+2$

$$4a^2+2=\frac{(6a+2)+(9a^2-3a+2)}{2}$$

$8a^2+4=9a^2+3a+4$

$a^2+3a=0$

$a=0,\ -3$

그런데 $f(x)$는 이차식이므로 $a\neq 0$

$\therefore\ a=-3$

11. 첫째항이 35 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$ 이므로 $d = -9$

$$\begin{aligned} \therefore S_{10} &= \frac{10(2a+9d)}{2} \\ &= \frac{10(70-81)}{2} \\ &= \frac{-110}{2} = -55 \end{aligned}$$

12. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = -n^2 + 2n$일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -280

해설

$$\begin{aligned}
&a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) \\
&= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10) \\
&= -360 - (-80) = -280
\end{aligned}$$

13. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 2n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_2 + a_4 + a_6$의 값은?

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

해설

$S_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$S_{n-1} = (n-1+1)^2 = n^2$

$a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \ (n \geq 2)$

$a_2 + a_4 + a_6 = 5 + 9 + 13 = 27$

14. 8과 27사이에 두 수 x, y를 넣었더니 8, x, y, 27이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8, x, y, 27이 등비수열이므로

$a_1 = 8$

$a_4 = a_1 r^3 = 27,\ 8r^3 = 27$

$r^3 = \dfrac{27}{8}, \quad \therefore r = \dfrac{3}{2}$

$x = a_1 r = 8 \cdot \dfrac{3}{2} = 12$

$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \dfrac{9}{4} = 18$

$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$

15. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2=96$, $a_1+a_2+a_3+a_4=120$ 일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

① 127　② 136　③ 148　④ 156　⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1+a_2=96$에서 $a+ar=96\cdots$㉠

$a_1+a_2+a_3+a_4=120$에서 $96+a_3+a_4=120$

즉, $a_3+a_4=24$이므로

$a_3+a_4=ar^2+ar^3=r^2(a+ar)$

$=96r^2=24$

$r^2=\frac{1}{4}\quad\therefore\ r=\frac{1}{2}(\because r>0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{2}a=96\quad\therefore\ a=64$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}=128\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}=128-1=127$$

16. $S=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=2}^{10}k+\sum_{k=3}^{10}k+\cdots+\sum_{k=9}^{10}k+\sum_{k=10}^{10}k$ 일 때, $\frac{1}{5}S$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 77

해설

$S=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=2}^{10}k+\sum_{k=3}^{10}k+\cdots+\sum_{k=9}^{10}k+\sum_{k=10}^{10}k$

$=1+2+3+4+\cdots+10$

$+2+3+4+\cdots+10$

$3+4+\cdots+10$

$\vdots$

$+10$

$=1+2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}=385$

$\therefore\ \frac{1}{5}S=77$

17. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$

$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$

$= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k$

$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$

$= 1155 - 110$

$= 1045$

18. $\sum_{k=1}^{50} \sqrt{(2k+1)-2\sqrt{k(k+1)}}$ 의 값을 α라 할 때, 자연수 n에 대하여 $n < \alpha < n+1$이 성립한다. 이때 n의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\sum_{k=1}^{50} \sqrt{(2k+1)-2\sqrt{k(k+1)}}$

$= \sum_{k=1}^{50}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{51}-\sqrt{50})$

$= \sqrt{51}-1$

$7 < \sqrt{51} < 8$이므로 $6 < \sqrt{51}-1 < 7$

$\therefore n = 6$

19. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+2015}$ 의 값은?

① $\dfrac{2014}{2015}$ ② $\dfrac{2015}{2016}$ ③ $\dfrac{2015}{1008}$ ④ $\dfrac{2014}{1008}$ ⑤ 2

해설

$\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2}{n(n+1)}$ 이므로

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{2015}\dfrac{2}{n(n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{2015}2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2016}\right)=\dfrac{2\times 2015}{2016}=\dfrac{2015}{1008}$

20. 수열 $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7, \cdots$ 의 계차수열을 $\{a_n\}$이라고 할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{n} b_k$를 나타내는 식은?

① n^2　　② n^2+2　　③ n^2+n+1

④ n^2+2n　　⑤ n^2+2n+3

해설

수열$\{a_n\}$은 $3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$ 이므로

$b_n = 2n+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

$= 2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + n$

$= n^2 + 2n$

21. $a_1 = 2,\ a_2 = 3$이고,
$a_{2n+2} = a_{2n} + 1,\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값은?

① 490　② 495　③ 500　④ 505　⑤ 510

해설

$a_{2n+2} = a_{2n} + 1,\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항들은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이고, 짝수 번째 항들은 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{30} a_k = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{29})$
$+(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30})$
$= \dfrac{15(2 \cdot 2 + 14 \cdot 3)}{2} + \dfrac{15(2 \cdot 3 + 14 \cdot 1)}{2}$
$= 495$

22. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① 32　　② 64　　③ 128　　④ 256　　⑤ 512

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$

23. 수열 $\{a_n\}$을 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2n(n \geq 1)$으로 정의할 때, a_{100}의 값은?

① 9900　　② 9902　　③ 9904

④ 10100　　⑤ 10102

해설

$a_1 = 2$

$a_{n+1} = a_n + 2n$의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 99$를 대입하여 변끼리 더하면

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2 \cdot 1 \\
a_3 &= a_2 + 2 \cdot 2 \\
&\vdots \\
+)\ \underline{a_{100}} &\underline{= a_{99} + 2 \cdot 99} \\
a_{100} &= 2 + 2(1 + 2 + \cdots + 99) \\
&= 2 + 99 \cdot 100 \\
&= 9902
\end{aligned}
$$

24. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $3-2^{12}$ ② $3-2^{11}$ ③ $3-2^{10}$

④ $3-2^{9}$ ⑤ $3-2^{8}$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$의 양변에 -3을 더하여 정리하면

$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

즉, 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 3 - 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 3 - 2^9$

25. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot 1=3$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
$3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$①이다.
①의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 [㉠] 일 때에도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$ ② $n=-k+2$ ③ $n=k+1$
④ $n=k+2$ ⑤ $n=2k+1$

해설

㉠의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$
$=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.