

1. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{2015} 의 값은?

- ① $\frac{2012}{2013}$ ② $\frac{2013}{2014}$ ③ $\frac{2014}{2015}$ ④ $\frac{2015}{2016}$ ⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 n 항의 분자는 n 이고 분모는 $n+1$ 이다.

따라서 구하는 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.

$$\therefore a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$$

2. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

- ① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \cdot \sum_{j=1}^{10} j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) \\ &= 385 \end{aligned}$$

3. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = a\sqrt{2} + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= -\{(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \cdots\} \\ &+ \{(\sqrt{49} - \sqrt{50})\} \\ &= -(1 - \sqrt{50}) = 5\sqrt{2} - 1 \\ &\text{따라서, } a = 5, b = -1 \text{ 에서 } a + b = 4 \end{aligned}$$

4. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$

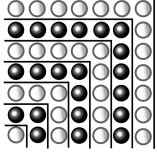
② $\frac{n}{n+1}$
⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

5. 오른쪽 그림을 이용하여 수열의 합을 설명할 수 있는 것은?



- ① $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
- ② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- ③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)^2}{2}\right\}$
- ④ $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- ⑤ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

해설

그림의 왼쪽 아래부터 생각해보면
흰돌의 수 = 1
검은돌의 수 = 3
흰돌의 수 = 5
즉 1, 3, 5, ... 이런 식으로
돌의 개수가 증가함을 알 수 있다.
그런데 그림에 놓인 돌의 개수는
가로와 세로가 같으므로
 $n \times n = n^2$ 임을 알 수 있다.
 $\therefore 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$



6. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \frac{n(1-x^n)}{2}$

② $S = \frac{1-x^n}{2}$

③ $S = \frac{1-x^n}{2} - \frac{2x^n}{x}$

④ $S = \frac{1-x^n}{1+x} - \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x 를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -) xS = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x \end{array}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

7. 수열 $(1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3), (4, 0) \cdots$ 에서 $(10, 9)$ 는 제 몇 항인가?

① 180 ② 189 ③ 198 ④ 199 ⑤ 206

해설

x 좌표와 y 좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면
 $\{(1, 0), (0, 1)\}, \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\},$
 $\{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}, \cdots$
 $(10, 9)$ 은 좌표의 합이 19이므로 제19군의 10번째 항이다.
 $\therefore (2 + 3 + 4 + \cdots + 19) + 10 = 199$

8. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 &= (\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2) - \sum_{k=1}^{10} k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 \\ &= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470\end{aligned}$$

9. 수열 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, ... 에서 13은 제 a 항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제 b 항이라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면
(1), (3, 3), (5, 5, 5), (7, 7, 7, 7), (9, 9, 9, 9, 9), ...
이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.
6군까지의 항수가 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ 이므로 제 7군의
첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.
따라서 $a + b = 22 + 28 = 50$

10. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행					1				
제2행				3	5	7			
제3행			9	11	13	15	17		
제4행	19	21	23	25	27	29	31		
⋮									

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.
제1군, 제2군, 제3군, ... 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 3, 9, 19, \dots$
 $\{b_n\} : 2, 6, 10, \dots$
 $\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n-2$
 $\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$
이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는
 $163 + (5-1) \times 2 = 171$