1. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{2015} 의 값은?

① $\frac{2012}{2013}$ ② $\frac{2013}{2014}$ ③ $\frac{2014}{2015}$ ④ $\frac{2015}{2016}$ ⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 n 항의 분자는 n 이고 분모는 $n+1$ 이다.

따라서 구하는 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.

$$\therefore\ a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$$

2. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10} j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10} j\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(385+385)$$
$$=385$$

3. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = a\sqrt{2}+b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$= -\left\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$

$+\left\{(\sqrt{49}-\sqrt{50})\right\}$

$= -(1-\sqrt{50}) = 5\sqrt{2}-1$

따라서, $a=5,\ b=-1$에서 $a+b=4$

4. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$ ② $\dfrac{n}{n+1}$ ③ $\dfrac{2n}{n+1}$

④ $\dfrac{2n}{2n+1}$ ⑤ $\dfrac{2n}{2n+3}$

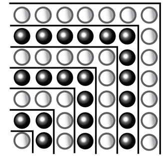
해설

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$

5. 오른쪽 그림을 이용하여 수열의 합을 설명할 수 있는 것은?



① $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)^2}{2}\right\}$

④ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

⑤ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

해설

그림의 왼쪽 아래부터 생각해보면

흰돌의 수$=1$

검은돌의 수 $=3$

흰돌의 수$=5$

즉 $1,\ 3,\ 5,\cdots$ 이런 식으로

돌의 개수가 증가함을 알 수 있다.

그런데 그림에 놓인 돌의 개수는

가로의 길이와 세로의 길이가 같으므로

$n\times n=n^2$ 임을 알 수 있다.

$\therefore 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

6. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \dfrac{n(1-x^n)}{2}$ ② $S = \dfrac{1-x^n}{2}$

③ $S = \dfrac{1-x^n}{2} - \dfrac{2x^n}{x}$ ④ $S = \dfrac{1-x^n}{1+x} - \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -)\ xS = & \quad\ \ x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x \end{array}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

7. 수열 $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (3,\ 0),$ $(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3),\ (4,\ 0)\cdots$ 에서 $(10,\ 9)$는 제 몇 항인가?

① 180 ② 189 ③ 198 ④ 199 ⑤ 206

해설

x좌표와 y좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면
$\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\},\ \{(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)\},$
$\{(3,\ 0),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3)\},\cdots$
$(10,\ 9)$은 좌표의 합이 19이므로 제19군의 10번째 항이다.
$\therefore (2+3+4+\cdots+19)+10=199$

8. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$$\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470$$

9. 수열 $1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 9,\ \cdots$ 에서 13은 제 a항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제b항이라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면

$(1), (3,\ 3), (5,\ 5,\ 5), (7,\ 7,\ 7,\ 7), (9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9), \cdots$

이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.

6군까지의 항수가 $1+2+3+4+5+6=21$ 이므로 제 7군의 첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.

따라서 $a+b=22+28=50$

10. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	11	13	15	17	
제4행	19	21	23	25	27	29	31
⋮				⋮			

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\underset{\text{제1군}}{\underline{(1)}}, \underset{\text{제2군}}{\underline{(3,\ 5,\ 7)}}, \underset{\text{제3군}}{\underline{(9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)}}, \cdots$ 각 군의 첫째항으로

이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\}: 1,\ 3,\ 9,\ 19, \cdots$

$\{b_n\}: 2,\ 6,\ 10, \cdots$

$\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-2) = 1 + 4 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$

이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는

$163 + (5-1) \times 2 = 171$