

1. $3^x = 2 + \sqrt{2}$, $3^y = 2 - \sqrt{2}$ 일 때, $x + y$ 의 값은?

① 1

② $\log_4 3$

③ $\log_3 2$

④ $\log_3 4$

⑤ $\log_4 10$

해설

$x = \log_3(2 + \sqrt{2})$, $y = \log_3(2 - \sqrt{2})$ 이므로

$x + y = \log_3 \{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})\} = \log_3 2$

2. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$

② $\log \sqrt{5} 25$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

④ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log \sqrt{5} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4$

③ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 2^{-4} = \frac{-4}{-1} \log_2 2 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

⑤ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$
 $= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 5}$
 $= \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4$
 $= 4 \log_2 2 = 4$

3. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
 $\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
 $= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
 $\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

4. $2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} &= 2^{\sqrt{2}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1} \\ &= 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5. $P = \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2}$ 에 대하여 $\sqrt[4]{P}$ 의 값은?

- ① $3\sqrt{9}$ ② $9\sqrt[4]{3}$ ③ $9\sqrt[4]{9}$ ④ $9\sqrt[4]{27}$ ⑤ 81

해설

$$\begin{aligned} P &= \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^4)^{-3} \cdot 3^3}{(3^3)^{-6} \cdot (3^2)^2} \\ &= \frac{3^6 \cdot 3^{-12} \cdot 3^3}{3^{-18} \cdot 3^4} \\ &= \frac{3^{-3}}{3^{-14}} \\ &= 3^{-3-(-14)} = 3^{11} \\ \therefore \sqrt[4]{P} &= \sqrt[4]{3^{11}} = 9\sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27} \end{aligned}$$

6. $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \frac{1}{8^x}$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} 8^x + \frac{1}{8^x} &= (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 \\ &= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) \\ &= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

7. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$x^3 + x^{-3}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$$

$$x - 2 + x^{-1} = 4$$

$$x + x^{-1} = 6$$

$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$$

$$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$$

8. $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $2\sqrt{2} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 2$

해설

$$a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면,

$$\begin{aligned}\frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} &= \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) + 1} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

9. $p \times 3^x = 1$, $q \times 3^y = 1$ 일 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}$ 을 p , q 로 바르게 나타낸 것은?

- ① $2pq$ ② $8pq$ ③ p^2q ④ p^4q^2 ⑤ $\frac{q}{p^2}$

해설

$3^x > 0$, $3^y > 0$ 이므로 $p > 0$, $q > 0$ 이다.

$$3^x = \frac{1}{p}, \quad 3^y = \frac{1}{q}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y} = (3^{-2})^{2x+y} = 3^{-4x-2y}$$

$$= (3^x)^{-4} (3^y)^{-2} = \left(\frac{1}{p}\right)^{-4} \left(\frac{1}{q}\right)^{-2} = p^4 q^2$$

10. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I 인 지진의 진도 R 을 다음과 같이 정의하였다.

$$R = \log \frac{I}{I_0} \text{ (단, } I_0 \text{는 표준지진의 강도)}$$

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

- ① 1.4배 ② 2배 ③ $\sqrt{10}$ 배
④ 10배 ⑤ 100배

해설

진도가 4.8, 6.8일 때의 지진의 강도를 각각 I_1 , I_2 라 하면

$$4.8 = \log \frac{I_1}{I_0}, \quad 6.8 = \log \frac{I_2}{I_0} \text{ 이므로}$$

$$\therefore \log \frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100(\text{배})$$

11. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \quad (\text{단, } x > 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & \log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \\ &= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

12. $\log_2 12 = a$ 일 때, $\log_3 6$ 을 a 로 나타내면?

- ① $\frac{a-1}{a-2}$ ② $\frac{a}{a-2}$ ③ $\frac{a}{a-1}$ ④ $\frac{a+1}{a-1}$ ⑤ $\frac{a+2}{a}$

해설

$$\begin{aligned}\log_2 12 &= \log_2 (2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3 \\ \text{즉, } 2 + \log_2 3 &= a \text{ 이므로 } \log_2 3 = a - 2 \\ \therefore \log_3 6 &= \frac{\log_2 6}{\log_2 3} = \frac{\log_2 (2 \times 3)}{\log_2 3} \\ &= \frac{1 + \log_2 3}{\log_2 3} = \frac{1 + (a - 2)}{a - 2} = \frac{a - 1}{a - 2}\end{aligned}$$

13. 방정식 $2x^2 - 8x - 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값은?

① -2 ② -8 ③ -12 ④ -26 ⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\log_{10} a + \log_{10} b = 4,$$

$$\log_{10} a \cdot \log_{10} b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$$

$$= \frac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2 \log_{10} a \cdot \log_{10} b}{\log_{10} a \cdot \log_{10} b}$$

$$= \frac{16 + 1}{-\frac{1}{2}} = -34$$

14. $\log \frac{x}{4.71} = 1.9812$ 를 만족하는 양수 x 의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구하여라.

수	0	1	1	3	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	...
4.6	.6628	.6737	.6647	.6656	...
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 451

해설

$\log x$ 의 가수를 구하고, 가수가 같은 로그의 진수를 상용로그표에서 찾는다.

$\log \frac{x}{4.71} = \log x - \log 4.71 = \log x - 0.6730 = 1.9812$ 이므로

$\log x = 2.6542 = 2 + 0.6542$

로그표에서 $\log 4.51 = 0.6542$ 이므로 $x = 451$

15. $\log x$ 의 정수 부분이 4이고, $\log y$ 의 정수 부분이 2일 때, $\log \sqrt{xy}$ 의 정수 부분을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\log x = 4 + \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\log y = 2 + \beta \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\log \sqrt{xy} = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$$

$$= \frac{1}{2} (4 + \alpha + 2 + \beta)$$

$$= 3 + \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta < 1 \text{ 이므로}$$

$$0 \leq \frac{1}{2} (\alpha + \beta) < 1$$

$$\therefore \log \sqrt{xy} \text{의 정수 부분은 } 3$$

16. $\log x$ 의 정수 부분은 3이고, $\log x$, $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분을 n , 소수 부분을 α 라 할 때 $n+8\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\log x = 3 + \beta \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\log \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \log x = 1 + \frac{\beta}{3}$$

$$\therefore \beta + \frac{\beta}{3} = 1$$

$$\therefore \beta = \frac{3}{4}$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}(3 + \alpha) = \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{4}$$

$$n = 2, \alpha = \frac{1}{4}$$

$$n + 8\alpha = 2 + 2 = 4$$

17. $\log_{10} N$ 의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 두 근일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$\log_{10} N$ 의 정수 부분과 소수 부분을 m, α ($0 \leq \alpha < 1$)라 하면 m, α 가 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계로부터 $m + \alpha = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ 이다.

따라서, $m = 2, \alpha = \frac{1}{2}$

한편, 두 근의 곱 $m\alpha = \frac{k}{2} = 1$ 이므로 $k = 2$

18. $\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

(i) $n = 1, 2$ 일 때, $0 \leq \log_3 n < 1$ 이므로 $[\log_3 n] = 0$

(ii) $3 \leq n < 9$ 일 때, $1 \leq \log_3 n < 2$ 이므로 $[\log_3 n] = 1$

(iii) $9 \leq n < 27$ 일 때, $2 \leq \log_3 n < 3$ 이므로 $[\log_3 n] = 2$

(iv) $27 \leq n < 81$ 일 때, $3 \leq \log_3 n < 4$ 이므로 $[\log_3 n] = 3$

(v) $81 \leq n < 100$ 일 때, $4 \leq \log_3 n < 5$ 이므로 $[\log_3 n] = 4$

(i) ~ (v)로부터

$$\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n] = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 54 + 4 \cdot 20 = 284$$

19. $\log_2 7$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $3^a + 2^b$ 의 값은?(단, $0 \leq b < 1$)

- ① $\frac{41}{4}$ ② $\frac{43}{4}$ ③ $\frac{45}{4}$ ④ $\frac{47}{4}$ ⑤ $\frac{49}{4}$

해설

밑이 1보다 크면 진수가 클수록 로그 값도 크므로

$$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$$

$$\therefore 2 < \log_2 7 < 3$$

따라서, $\log_2 7$ 의 정수부분 $a = 2$,

정수 부분이 2이므로 소수 부분은

$$b = \log_2 7 - 2 = \log_2 7 - \log_2 4 = \log_2 \frac{7}{4}$$

$$\therefore 3^a + 2^b = 3^2 + 2^{\log_2 \frac{7}{4}} = 9 + \frac{7}{4} = \frac{43}{4}$$

20. $\log 7.62 = 0.8820, \log 2.955 = 0.4705$ 일 때, $\sqrt[4]{0.0762}$ 를 계산하면 $0.abcd$ 이다. 이때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, $a, b, c,$ 는 0보다 크거나 같고 10보다는 작은 정수이다.)

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

$\log 7.62 = 0.8820$ 이므로

$$\sqrt[4]{0.0762} = \frac{1}{4} \log 0.00762 = \frac{1}{4} \log \frac{7.62}{1000}$$

$$= \frac{1}{4} (\log 7.62 - 3) = \frac{1}{4} (0.8820 - 3)$$

$$= -0.5292 = -1 + (1 - 0.5292)$$

$$= -1 + 0.4705 = -1 + \log 2.955$$

$$= \log \frac{1}{10} + \log 2.955$$

$$= \log 0.2955$$

$$\text{따라서 } \sqrt[4]{0.0762} = 0.2955$$

$$a+b+c+d \text{는 } 2+9+5+5=21$$

21. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 일 때, 18^{50} 은 몇 자리의 정수인가?

① 59

② 60

③ 61

④ 62

⑤ 63

해설

$A = 18^{50}$ 일 때, $\log A$ 의 지표에서 A 의 자리 수를 구한다.

$\log 18^{50}$

$= 50 \log(2 \times 3^2) = 50(\log 2 + 2 \log 3)$

$= 50(0.3010 + 2 \times 0.4771) = 50 \times 1.2552$

$= 62.76$

따라서 $\log 18^{50}$ 의 지표가 62이므로 18^{50} 은 63자리 정수이다.

22. 사람의 기억력은 시간이 지남에 따라 점점 떨어진다. 현재의 기억량을 100이라 할 때, 현재의 기억량 중 t 개월이 지난 후까지 남는 양은 $\log_2 \frac{2^{100}}{(t+1)^k}$ (k 는 상수) 이라 한다. 9개월이 지난 후까지 남는 기억량이 현재 기억량의 $\frac{3}{4}$ 일 때, $10k$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

현재 기억량을 100이라 할 때, 9개월이 지난 후까지 남는 기억량이 현재 기억량의 $\frac{3}{4}$ 이므로 $\log_2 \frac{2^{100}}{(9+1)^k} = \frac{3}{4} \times 100$

$$100 - k \log_2 10 = 75$$
$$k = \frac{25}{\log_2 10} = 25 \log_{10} 2 = 25 \times 0.3 = 7.5$$
$$\therefore 10k = 75$$

23. $\sqrt{a-1}\sqrt{-a} = -\sqrt{a-a^2}$ 이고, n 이 자연수일 때, $b = \sqrt[n]{a^{n+1}}, c = \sqrt[n+1]{a^{n+2}}$ 이라 한다. 다음의 서로 다른 세 실수 a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?

- ① $a < b < c$
- ② $a < c < b$
- ③ $b < a < c$
- ④ $b < c < a$
- ⑤ $c < a < b$

해설

$\sqrt{a-1}\sqrt{-a} = -\sqrt{a-a^2}$ 이므로
 $a-1 \leq 0, -a \leq 0$
 a, b, c 가 서로 다른 실수이므로 $a = 0, a = 1$ 일 때는 성립하지 않는다.
 $\therefore 0 < a < 1$
 $b = \sqrt[n]{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n}} = a^{1+\frac{1}{n}}$
 $c = \sqrt[n+1]{a^{n+2}} = a^{\frac{n+2}{n+1}} = a^{1+\frac{1}{n+1}}$
지수를 비교해 보면 $1 < 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$
 $\therefore b < c < a$

24. $\frac{2002!}{(1001!)^2}$ 의 끝자리에 오는 0의 개수를 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 200 ⑤ 400

해설

$n!$ 의 끝자리에 오는 0의 개수는 $n!$ 의 약수에서 10의 거듭제곱의 최대 지수와 같다. 또한 $n!$ 로 나눌 때, 5의 거듭제곱의 최대 지수이다.

일반적으로 $n!$ 의 소인수분해에서 소인수 p 의 거듭제곱의 최대 지수는

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots \text{이다.}$$

그러므로 $\frac{2002!}{(1001!)^2}$ 의 약수에서

5의 거듭제곱의 최대 지수는

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2002}{5}\right] + \left[\frac{2002}{5^2}\right] + \left[\frac{2002}{5^3}\right] + \left[\frac{2002}{5^4}\right] \\ & - 2\left(\left[\frac{1001}{5}\right] + \left[\frac{1001}{5^2}\right] + \left[\frac{1001}{5^3}\right] + \left[\frac{1001}{5^4}\right]\right) \\ & = (400 + 80 + 16 + 3) - 2(200 + 40 + 8 + 1) = 1 \end{aligned}$$

25. 빛이 통과하면 밝기가 6% 줄어드는 유리판이 있다. 밝기를 반 이하가 되도록 하려면 최소한 몇 장의 유리판을 통과시켜야 하는가?
(단 $\log 9.4 = 0.9731$, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.)

- ① 10
- ② 11
- ③ 12
- ④ 13
- ⑤ 14

해설

처음 밝기를 a 라 하면
1 회 후 밝기 $= 0.94a$
2 회 후 밝기 $= 0.94^2a$
 $\vdots$
 n 회 후 밝기 $= 0.94^na$
 $0.94^na \leq \frac{1}{2}a$
 $0.94^n \leq \frac{1}{2}$
 $\log 0.94^n \leq \log \frac{1}{2}$
 $n \log 0.94 \leq \log 2^{-1}$
 $n \log \frac{9.4}{10} \leq -\log 2$
 $n(\log 9.4 - 1) \leq -\log 2$
 $n(0.9731 - 1) \leq -0.3010$
 $n \cdot (-0.0269) \leq -0.3010$
 $n \geq \frac{3010}{269} = 11.189 \times \times \times$
 $\therefore n = 12$