1. $\log_x 81 = 2$를 만족하는 x의 값은?

① 3 ② 9 ③ 12 ④ 13 ⑤ 81

해설

$\log_x 81 = 2$에서 $x^2 = 81$
그런데, $x \neq 1,\ x > 0$이어야 하므로 $x = 9$

2. $\log_{\sqrt{2}}(\log_x 4) = 4$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

$\log_{\sqrt{2}}(\log_x 4) = 4$에서

$\log_x 4 = (\sqrt{2})^4 = 4$

$\therefore\ x^4 = 4,\ x^2 = 2$

이 때, 밑의 조건에서 $x \neq 1, x > 1$이므로 $x = \sqrt{2}$

3. $\log_{(x+2)} 5$ 값이 존재하기 위한 x의 범위는?

① $-2 < x \le -1,\ x > -1$　　② $-2 < x < -1,\ x \ge -1$

③ $-2 < x < -1,\ x > -1$　　④ $-2 < x < 1,\ x > 2$

⑤ $-2 < x < 2,\ x \ge 3$

해설

$x+2 \ne 1,\ x+2 > 0$ 으로부터

$-2 < x < -1,\ x > -1$

4. $\log_{(x-1)}(-x^2+4x-3)$ 값이 존재하기 위한 x의 범위는?

① $1 < x < 2,\ 2 < x < 3$　② $1 < x \leq 2,\ 2 < x < 3$

③ $1 < x < 2,\ 2 < x \leq 3$　④ $1 < x < 2,\ 2 \leq x < 3$

⑤ $1 < x < 3,\ 3 < x < 4$

해설

밑 : $x-1>0,\ x-1 \neq 1 \cdots$ ㉠

진수 : $-x^2+4x-3>0$

$x^2-4x+3<0$

$(x-1)(x-3)<0,\ 1<x<3 \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$\therefore\ 1<x<2,\ 2<x<3$

5. $\log_{(x+2)} 3$의 값이 존재하기 위한 x의 범위는?

① $x < 1$ ② $x > -1$

③ $-2 < x < -1,\ x > -1$ ④ $-2 < x < 1$

⑤ $-2 < x < -1, x > 1$

해설

$x + 2 \neq 1,\ x + 2 > 0$으로부터 $-2 < x < -1,\ x > -1$

6. $\log_2(x-5)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x > 2$ ② $x < 2$ ③ $x > 5$ ④ $x < 5$ ⑤ $x \neq 5$

해설

$x - 5 > 0$ 로부터 $x > 5$

7. $\log_4(x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

① $x > 4$ ② $x < 4$ ③ $x < 6$ ④ $x > 8$ ⑤ $x \geq 8$

해설

$x - 8 > 0$ 로부터 $x > 8$

8. 다음 식의 값 중 값이 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$ ② $\log_{\sqrt{5}} 25$

③ $\log_2 3 \log_3 5 \log_5 16$ ④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4$

③ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16 = \frac{\log 3 \cdot \log 5 \cdot \log 16}{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 5}$

$= \frac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 16 = \log_2 16 = 4$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

9. $\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{8}$ 에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

10. $\log_2(\log_8 x) = -1$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $2\sqrt{2}$

해설

$\log_2(\log_8 x) = -1$ 에서

$\log_8 x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

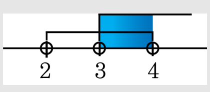
$\therefore x = 8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

11. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$이 정의되기 위한 실수 x의 값의 범위를 구하면?

① $3 < x < 4$　② $5 < x < 7$　③ $-1 < x < 3$
④ $x > 0$　⑤ $2 < x < 5$

해설

$x-3 \neq 1,\ x-3>0,$
$-x^2+6x-8>0$이므로
$x \neq 4,\ x > 3$
$x^2-6x+8<0$
$2<x<4$



$\therefore 3<x<4$

12. $a = \log_4(3 - \sqrt{8})$ 일 때, $2^a + 2^{-a}$ 의 값은?

① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}+1$　③ $2\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{3}+1$　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

로그의 정의에 의하여

$4^a = 3 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2^{2a} = 3 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{2} - 1$

$2^{-a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\Leftrightarrow 2^{-a} = \sqrt{2} + 1$

$2^a + 2^{-a} = 2\sqrt{2}$

13. $a=\dfrac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2}$ 일 때, 4^a 의 값은?

① $\log_5 7$ ② $\log_3 5$ ③ $3^{\log_5 2}$ ④ $3^{\log_5 5}$ ⑤ $3^{\log_5 7}$

해설

$a=\dfrac{\log_3(\log_5 7)}{2\log_3 2}$

$=\dfrac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 2^2}$

$=\dfrac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 4}=\log_4(\log_5 7)$

$\therefore 4^a=\log_5 7$

14. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x의 범위는?

① $-1 < x < 3$　② $0 > x$　③ $2 < x < 5$
④ $3 < x < 4$　⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x-3>0, x-3 \neq 1$
따라서 $x > 3, x \neq 4 \cdots$ ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+6x-8>0$
$x^2-6x+8<0$
$(x-2)(x-4)<0$
따라서 $2 < x < 4 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면 $3 < x < 4$

15. 모든 실수 x에 대하여 $\log_4\{x^2-(a-1)x+4\}$의 값이 존재하기 위한 a의 값의 범위는?

① $-3<a<5$ ② $-3\le a\le 5$ ③ $-1<a<1$
④ $1<a<3$ ⑤ $3\le a\le 5$

해설

진수의 조건에서 $x^2-(a-1)x+4>0$
방정식 $x^2-(a-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(a-1)^2-16<0$
$a^2-2a-15<0$
$(a+3)(a-5)<0$
$\therefore -3<a<5$

16. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$이 의미를 갖기 위한 정수 k의 개수는?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$\log_a b$에서 $a > 0,\ a \neq 1, b > 0$
(i) $(k-2)^2 > 0 \rightarrow k \neq 2$
(ii) $(k-2)^2 \neq 1 \rightarrow k \neq 3,\ 1$
(ii) $kx^2 + kx + 1 > 0$
$\rightarrow k = 0$ 또는 $k > 0$일때, $k^2 - 4k < 0$
$\therefore\ 0 < k < 4$
따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k는 0

17. $\log_{1-x}(-x^2-2x+15)$ 의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

① -15 ② -10 ③ -6 ④ 2 ⑤ 4

해설

밑의 조건에서

$1-x>0,\ 1-x\neq 1$

$\therefore x\neq 0, x<1 \cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서

$-x^2-2x+15>0,\ (x-3)(x+5)<0$

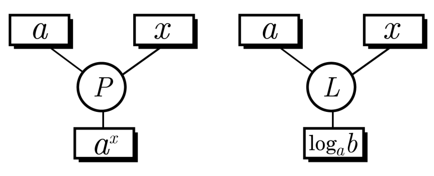
$\therefore -5<x<3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통 범위를 구하면

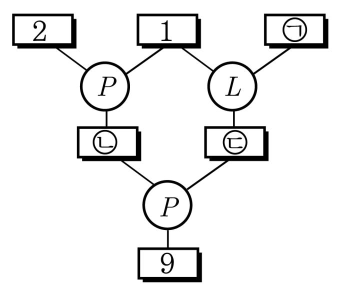
$-5<x<0,\ 0<x<1$

따라서 구하는 정수 x는 $-4, -3, -2, -1$이고 그 합은 -10이다.

18. a^x과 $\log_a b$를 다음과 같이 나타내었다.



이때, 다음의 ㉠에 알맞은 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

㉡ $= 2^4$ ㉢ $= \log_4^{㉠}$

㉡$^{㉢} = 9$

$16^{\log_4^{㉠}} = 9$

㉠$^{\log_4^{16}} = 9$

㉠$^2 = 9$

㉠ $= 3$

19. $\log_{x-2}(-x^2+4x)$가 정의되기 위한 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 없다.

해설

(i) 밑의 조건 : $x-2>0$이고 $x-2 \neq 1$

$\therefore\ x>2$이고 $x \neq 3$

(ii) 진수 조건 : $-x^2+4x>0$

$\therefore\ 0<x<4$

따라서, (i), (ii)에서 $2<x<4$이고 $x \neq 3$이므로

이를 만족하는 정수 x는 없다.

20. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+x)$의 값의 존재하기 위한 정수 k의 개수는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

밑의 조건에서 $(k-2)^2 > 0, (k-2)^2 \neq 1$
$(k-2)^2 > 0$에서 $k-2 \neq 0 \therefore k \neq 2 \cdots$ ㉠
$(k-2)^2 \neq 1$에서 $k-2 \neq 1, k-2 \neq -1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$k \neq 1, k \neq 2, k \neq 3 \cdots$ ㉢
진수의 조건에서 $kx2 + kx + 1 > 0$
(i)$k = 0$일 때, $1 > 0$이므로 부등식은 항상 성립한다.
(ii)$k = 0$일 때, 방정식 $kx^2 + kx + 1 = 0$의 판별식을 D라 하면
$D = k^2 - 4k < 0, k(k-4) < 0$
$\therefore 0 < k < 4$
(i), (ii)에 의하여 $0 \leq k < 4 \cdots$ ㉣
따라서 ㉢, ㉣을 모두 만족시키는 정수는 0으로 1개이다.

21. $\log_{n^2-n+1}(25-n^2)$ 이 정의될 수 있는 정수 n 의 개수는?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$\log_a b$가 정의되기 위해서는 $a > 0, a \neq 1$이고 $b > 0$이어야 한다.
모든 정수 n에 대하여

$n^2 - n + 1 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$이므로

로그의 밑의 조건에 의하여

$n^2 - n + 1 \neq 1, n^2 - n \neq 0$

$\therefore n \neq 0$이고 $n \neq 1 \cdots\cdots$ ㉠

한편, 로그의 진수 조건에 의하여

$25 - n^2 > 0$ 이므로 $(n-5)(n+5) < 0$

$\therefore -5 < n < 5 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 정수 n은 $-4, -3, -2, -1, 2, 3, 4$로 7개다

22. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2-ax+1)$이 정의되기 위한 정수 a의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a-3|>0$이고 $|a-3|\neq 1$

$\therefore a\neq 3,\ a\neq 2,\ a\neq 4 \cdots\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 진수조건에서 $3ax^2-ax+1>0$

① $a=0$ 일 때, $1>0$ 이므로 성립

② $a>0$일 때, 방정식 $3ax^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-12a<0,\ a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$

①, ②에서 $0\leq a<12 \cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수는 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 9개다.