1. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11번째 항은 11이다.

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{20}의 값은?

① 38 ② 39 ③ 41 ④ 42 ⑤ 43

해설

$a_{20} = S_{20} - S_{19}$
$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$
$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$
$\therefore\ a_{20} = 439 - 398 = 41$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6 의 값은?

① $-\sqrt{3}$　② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$(복호동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$ 이므로
$(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)$ 에서
$4a_6 = 2\sqrt{3} \quad \therefore\ a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 수열 $1,\ -10,\ 10^2,\ -10^4, \cdots$ 은 첫째항이 a, 공비가 r 인 등비수열이다. 이 때, $a+r$ 의 값은?

① -10　② -9　③ -8　④ -7　⑤ -6

해설

$a=1,\ r=-10$

$\therefore a+r=-9$

5. 수열 $1,\ a,\ \frac{1}{16},\ b, \cdots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 8　　④ 16　　⑤ 32

해설

첫째항$= 1$, 공비$= a$

$a_n = a^{n-1}$

$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm\frac{1}{4}$

$a_4 = a^3 = \pm\frac{1}{64} = b$

$\therefore \frac{\pm\frac{1}{4}}{\pm\frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16$($\because$복호동순)

6. 수열 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \cdots + x^{2n-1}$ 의 합은? (단, $x \neq 1$)

① $2n$　② $\dfrac{x^{2n}}{x-1}$　③ $\dfrac{x^{2n}-1}{x-1}$

④ $\dfrac{x^{2n}-1}{x}$　⑤ $\dfrac{x^{2n}+1}{x-1}$

해설

첫째항이 1, 공비가 x, 항수가 $2n$ 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{1 \cdot (x^{2n}-1)}{x-1} = \frac{x^{2n}-1}{x-1}$$

7. $\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5 ② -7 ③ -8 ④ -79 ⑤ -80

해설

$\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$
$=\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{80}-\sqrt{81}$
$=\sqrt{1}-\sqrt{81}$
$=1-9=-8$

8. 다음 수열에서 $a+b$의 값을 구하여라.

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ a,\ b,\ \cdots$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1, & & 2, & & 4, & & 7, & & 11, & & 16, & & 22 \\ & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \end{array}$$

$\therefore a=16,\ b=22$

$a+b=16+22=38$

9. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$2p+1$, p^2, $2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6$, $p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

10. 직각삼각형의 세 변의 길이가 공차 d인 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 이 직각삼각형의 넓이를 d에 대한 식으로 나타내면?

① $4d^2$ ② $6d^2$ ③ $8d^2$ ④ $10d^2$ ⑤ $12d^2$

해설

세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 $a+d$가 빗변의 길이가 되므로 피타고라스의 정리에 의해

$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$

$a^2+2ad+d^2=a^2-2ad+d^2+a^2$

$a^2-4ad=0$, $a=4d$

그런데 $a>0$이므로 $a=4d$

따라서 직각삼각형의 세 변의 길이는 $3d$, $4d$, $5d$이므로

직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3d\times 4d=6d^2$

11. 다음 표에 적당한 수를 넣어 각 행과 각 열이 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 12개의 빈 칸에 들어갈 수들의 총합을 구하여라.

1			7
10			34

▶ 답 :

▷ 정답 : 156

해설

다음 표와 같이 빈 칸에 문자를 대응시키자.

1	a	b	7
c	d	e	f
g	h	i	j
10	k	l	34

각 행과 열이 각각 등차수열을 이루므로

$a+b=1+7=8$

$k+l=10+34=44$

$c+g=1+10=11$

$f+j=7+34=41$

또, $(d+e)+(h+i)=(c+f)+(g+j)$

$=(c+g)+(f+j)=11+41=52$

이므로 구하는 총합은

$8+44+11+41+52=156$

12. 2와 $\frac{2}{3}$ 사이에 두 수 a, b를 넣어서 만든 4개의 수 2, a, b, $\frac{2}{3}$가 이 순서로 조화수열을 이룰 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 값은?

① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

2, a, b, $\frac{2}{3}$가 조화수열을 이루므로 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{3}{2}$이 등차수열을 이룬다.

따라서 $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{b}$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

13. 등차수열 30, x_1, x_2, $x_3, \cdots$, x_n, -10의 합이 210이 되도록 공차 d의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

첫째항이 30, 끝항이 -10이고 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 210이므로

$$\frac{(n+2)\left\{30+(-10)\right\}}{2}=210$$

$n+2=21 \quad \therefore\ n=19$

따라서 끝항은 주어진 수열의 제 21항이므로

$-10=30+(21-1)d \quad \therefore\ d=-2$

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 28$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 175

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_6+a_{11}+a_{15}+a_{20} = 4a+48d = 28$

$a = 7 - 12d$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{25}$

$= \dfrac{25\{2(7-12d)+(25-1)d\}}{2} = 175$

15. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\frac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\log_2 a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$
$= 3n - 1$
$a_n = 2^{3n-1}$
$\frac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

16. $(2^2+1)+(3^2+3)+(4^2+5)+\cdots+(10^2+17)$ 의 값은?

① 465　② 466　③ 467　④ 468　⑤ 469

해설

$\sum_{k=1}^{9}\left\{(k+1)^2+(2k-1)\right\}=\sum_{k=1}^{9}(k^2+4k)$

$=\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}4k$

$=\dfrac{9\cdot 10\cdot 19}{6}+4\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}=285+180=465$

17. 두 수열 a_n, b_n에 대하여 $a_n = n^3 + 3n^2 + 2n$, $b_n = n^2 + n$일 때, $\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\right)$의 값은?

① 4000 ② 4100 ③ 4200 ④ 4300 ⑤ 4400

해설

$a_n = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$

$b_n = n^2 + n = n(n+1)$

$\therefore\ \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{4} a_i\left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$

$= \left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$

$= \left\{\sum_{i=1}^{4} i(i+1)(i+2)\right\} \times \sum_{j=1}^{3} j(j+1)$

$= \sum_{i=1}^{4}(i^3 + 3i^2 + 2i) \times \sum_{j=1}^{3}(j^2 + j)$

$$= \left\{\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6} + 2\cdot\frac{4\cdot 5}{2}\right\}$$

$$\times\left(\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6} + \frac{3\cdot 4}{2}\right)$$

$= 210 \times 20 = 4200$

18. $1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + \cdots + 15 \cdot 1$ 의 값은?

① 640　② 660　③ 680　④ 700　⑤ 720

해설

$n \le 15$ 일 때, $a_n = n(16-n) = -n^2 + 16n$

$\therefore 1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + \cdots + 15 \cdot 1$

$= \sum_{k=1}^{15}(-k^2 + 16k) = -\sum_{k=1}^{15} k^2 + 16\sum_{k=1}^{15} k$

$= -\dfrac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} + 16 \cdot \dfrac{15 \cdot 16}{2} = 680$

19. 수열 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$ 의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$　　② $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　　④ $\frac{1}{4}n(n+1)(n+3)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+3)$

해설

$a_n = 1+2+\cdots+n$

$= \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k(k+1)}{2} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$

$= \dfrac{n(n+1)\cdot 2(n+2)}{2\cdot 6}$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

20. 오른쪽 그림과 같이 연속한 자연수 1, 2, 3, $\cdots$ 을 나열할 때, 위에서 5번째 행의 왼쪽에서 11번째 열의 수는?

1	4	9	16	$\cdots$
2	3	8	15	
5	6	7	14	
10	11	12	13	
$\vdots$				$\ddots$

① 113 ② 114 ③ 116 ④ 117 ⑤ 119

해설

수열로 표시하면

$(1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9), \cdots$

로 묶을 수 있으며 제 n군의 끝항은

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 이므로 위에서 5번째 행, 왼쪽에서 11번째 열의 수는 제 11군의 끝항에서 5번째에 있는 수이다.

$\therefore 11^2-4=117$

21. $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1$, $a_{n+9} - a_{n+2} = 35$ 가 성립할 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$a_{n+9} = a_{n+2} + 7d$ 에서 $7d = 35$

$\therefore\ d = 5$

$\therefore\ a_{100} = 1 + 99 \cdot 5 = 496$

22. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_7의 값은?

① 216　② 317　③ 365　④ 509　⑤ 1021

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 3$에서
$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$
이때, 수열 $\{a_n + 3\}$은 첫째항이 $a_1 + 3$, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n + 3 = (a_1 + 3) \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$
따라서, $a_n = -3 + 5 \cdot 2^{n-1}$이므로
$a_7 = -3 + 5 \cdot 2^6 = 317$

23. 수열 $\{a_n\}$이 $\log_3 a_n - 2\log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 0(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족하고, $a_1 = 1,\ a_2 = 3$일 때, $\log_3 a_{10}$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 6　　④ 9　　⑤ 18

해설

$\log_3 a_n - 2\log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 0(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서

$2\log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + \log_3 a_{n+2}$

$\log_3 a_{n+1}^2 = \log_3 a_n a_{n+2}$

$\therefore\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고,

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{3}{1} = 3$이므로 첫째항은 1이고, 공비는 3이다.

즉, $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$이므로 $a_{10} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9$

24. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된다. 자연수의 집합에서 정의되는 함수 $f(n)$을 $f(n) = a_n$이라 할 때, 함수 $f(n)$의 주기는?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = \frac{2+1}{3} = 1,\ a_4 = \frac{1+1}{2} = 1,\ a_5 = \frac{1+1}{1} = 2,$

$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3,\ a_7 = \frac{3+1}{2} = 2,\ a_8 = \frac{2+1}{3} = 1,\ a_9 = \frac{1+1}{2} = 1,\ a_{10} = \frac{1+1}{1} = 2, \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 2, 1, 1, 2가 반복된다.

따라서 함수 $f(n) = a_n$의 주기는 5이다.

25. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3}=$ (우변) 이므로 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k+1}$
> 위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
> $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+[㉠]=[㉡]$
> 즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
> 따라서, (i),(ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)},\ \frac{2k+1}{2k+3}$ ② $\frac{1}{2k(2k+2)},\ \frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+1}{2k+3}$ ④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+3}{2k+3}$

해설

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$ 의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned}(\text{우변}) &= \frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$