

1. 다음 ()안에 알맞은 것은?

$1 - 2i, 2 - 4i, 3 - 8i, 4 - 16i, (\quad), \dots$

- ① $5 - 18i$
- ② $5 - 20i$
- ③ $5 - 24i$
- ④ $5 - 32i$
- ⑤ $5 - 64i$

해설

주어진 복소수의 배열을 $a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, a_3 + b_3i, a_4 + b_4i, \dots$ 와 같이 생각한다면 (단, a_k, b_k 는 실수)
수열 $\{a_n\}$ 의 배열은 1, 2, 3, 4, (), ... 이고
수열 $\{b_n\}$ 의 배열은 -2, -4, -8, -16, (), ... 이다.
따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5 - 32i$ 이다.

2. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

-1, 2, -3, 4, ...

- ① $(-1)^{n+1} \times n$
- ② $n - (-1)^n$
- ③ $(-1)^n + n$
- ④ $(-1)^n \times n$
- ⑤ $\frac{1}{2} \{1 - (-1)^n\}$

해설

$a_1 = -1 \cdot 1$

$a_2 = (-1)^2 \cdot 2$

$a_3 = (-1)^3 \cdot 3$

$a_4 = (-1)^4 \cdot 4$ 이므로

$a_n = (-1)^n \cdot n$

3. 등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 305$ 에서 공차를 d 로 놓으면
305는 제 102항이므로

$$305 = 2 + (102 - 1)d$$

$$\therefore d = \frac{303}{101} = 3$$

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$ 가 성립할 때, a_6 의 값은?

① 5

② 8

③ 11

④ 13

⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4 는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d 라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$ 이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore d = 3$

$\therefore a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

5. 수열 $a, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, b, \dots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$\text{공차를 } d \text{ 라 하면 } d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

6. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10} 을 구하면?

① 150

② 170

③ 190

④ 210

⑤ 230

해설

$a = 3, d = 4, n = 10$ 이므로

$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 에 대입하면

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 4\}}{2} = 210$$

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$$

$$2a + 23d = 36$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} &= \frac{24(2a + 23d)}{2} \\ &= 12 \times 36 \\ &= 432\end{aligned}$$

8. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned}a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\&= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\&= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\&= 199 - 3 \\&= 196\end{aligned}$$

9. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

10. 세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x , 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2x = 1 + 5 = 6 \quad \therefore x = 3$$

세 수 1, y , 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2 = 5$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 = 14$$

11. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

12. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_5 = -2$ 일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d 라 하면

$$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$$

이때, $a_n \geq 0$ 에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로

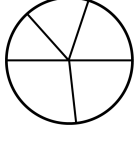
$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{20})$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$$

$$= 2 \cdot \frac{4(6+0)}{2} - \frac{20(6-32)}{2} (\because a_4 = 0, a_{20} = -32)$$

$$= 24 + 260 = 284$$

13. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때 k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 라 하면

$$2(a - 2d) = a + 2d$$

$$2a - 4d = a + 2d$$

$$a = 6d$$

$$\therefore 4d, 5d, 6d, 7d, 8d$$

$$\text{그런데 } \frac{5(4d + 8d)}{2} = 15^2\pi$$

$$6d = 45\pi$$

$$d = \frac{15}{2}\pi$$

$$\therefore 8d = 8 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi$$

$$\therefore k = 60$$

14. 세 수 $a, b, 12$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?(단, $a > 0, b > 0$)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 $a, b, 12$ 가 이 순서로 등차수열을 이루므로
 $2b = a + 12 \cdots \textcircled{1}$
세 수 $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이루므로
 $a^2 = 4b \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $4b = 2a + 24$ 이므로 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $a^2 = 2a + 24$
 $a^2 - 2a - 24 = 0, (a - 6)(a + 4) = 0$
따라서 $a = 6 (\because a > 0)$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $2b = 6 + 12 \quad \therefore b = 9$
 $a + b = 15$

15. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하면

$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$ 이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$ 이므로

$a_3 = S_3 - S_2$

$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$

$\log_3(T_n - 1) = n$ 에서 $T_n = 3^n + 1$ 이므로

$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$

$= 28 - 10 = 18$

이때, $a_3 = b_3$ 이므로 $k + 5 = 18 \quad \therefore k = 13$

16. 광이가 첫째 날에 2원, 둘째 날에 6원, 셋째 날에 18원, ... 과 같이 매일 전날의 3배씩 30일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

- ① $3^{30} - 2$ 원 ② $3^{30} - 1$ 원 ③ 3^{30} 원
④ $3^{30} + 1$ 원 ⑤ $3^{30} + 2$ 원

해설

전날의 3배씩 모으므로 공비 $r = 3$

$a = 2, r = 3$

$$\therefore S_{30} = \frac{2 \cdot (3^{30} - 1)}{3 - 1} = 3^{30} - 1$$

17. 두 등차수열 a_n, b_n 에 대하여 $a_1 + b_1 = 5$, $a_{10} + b_{10} = 10$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값은?

- ① 75 ② 85 ③ 95 ④ 105 ⑤ 115

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k &= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} + \frac{10(b_1 + b_{10})}{2} = 5(a_1 + a_{10}) + 5(b_1 + b_{10}) \\ &= 5(a_1 + b_1) + 5(a_{10} + b_{10}) = 5 \times 5 + 5 \times 10 = 75\end{aligned}$$

18. 수열 $2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, 5 \cdot 9, \dots$ 의 제 n 항까지의 합은?

① $4n^2 + 15n + 17$

② $n(4n^2 + 15n + 17)$

③ $\frac{4n^2 + 15n + 17}{3}$

④ $\frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{3}$

⑤ $\frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{6}$

해설

$$a_k = (k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1 \text{ 이므로}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k^2 + 3k + 1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{6}$$

19. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 - n + 3$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^5 a_{2k-1}$ 의 값은?

① 82 ② 84 ③ 86 ④ 88 ⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n + 3 - \{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\} \\ &= 4n - 3 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ &= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88 \end{aligned}$$

20. 수열의 합 $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ 의 값은?

- ① $\frac{n(n-3)}{(n+1)(n+2)}$

③ $\frac{n(n+6)}{3(n+1)(n+2)}$

⑤ $\frac{n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}$
- ② $\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$

④ $\frac{2n(n+3)}{(n+1)(n+3)}$

해설

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \text{ 이므로}$$
$$(\text{준식}) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$$
$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots$$
$$+ \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

21. $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{24}$
- ② $\frac{1}{48}$
- ③ $\frac{5}{16}$
- ④ $\frac{5}{24}$
- ⑤ $\frac{5}{48}$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2 \ (n \geq 2) \\ a_1 &= 1 + 3 = 2 + 2 = 4 \circ \text{므로, } a_n = 2n + 2 \ (n \geq 1) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

22. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 291

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{100}{k} \right\rfloor = 100 + 50 + 33 + 25 + 20 + 16 + 14 + 12 + 11 + 10 = 291$$

23. $a_n = 2n^2 + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \{2(n+1)^2 + (n+1)\} - (2n^2 + n) \\ &= 4n + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k + 3) \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 3 \cdot 10 \\ &= 250 \end{aligned}$$

24. $a_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$ 이라 할 때, 수열 $\frac{1}{1+a_1}, \frac{3}{3+a_2}, \frac{7}{1+a_3}, \frac{15}{1+a_4}, \dots$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합은?

- ① $19 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$
 ② $20 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$
 ③ $19 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$
- ④ $20 + \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$
 ⑤ $21 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

해설

$$a_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

이고, 주어진 수열의 일반항은 $\frac{2^n - 1}{1 + a_k}$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2^k - 1}{1 + a_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2^k - 1}{1 + 2^k - 1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\} \\ &= n - \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \end{aligned}$$

따라서 $S_n = 19 + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

25. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 제 20 항은?

- ① $\frac{9}{64}$
- ② $\frac{11}{64}$
- ③ $\frac{9}{32}$
- ④ $\frac{19}{32}$
- ⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면
제1군 제2군 제3군
→ $\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \dots$
제 n 군까지의 항수는
 $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
따라서, 제 4군까지 항수는 15 개이므로 구하는 제 20 항은 제5
군의 제5항이다.
한편, 제 n 군의 제 m 항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로
제5군의 제5항은 $\frac{9}{2^5} = \frac{9}{32}$

26. 다음과 같은 수열에서 (6, 4)는 몇 번째 항인가?

(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1),
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), (2, 4), ...

- ① 제40항

② 제41항

③

 제42항

④ 제43항

⑤ 제44항

해설

(합이 2인 순서쌍)= 1개, (합이 3인 순서쌍)= 2개, ... 합이 9
개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$
이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 (6, 4)는 여섯 번째이므로 42
번째이다.

27. $a_1 = 1$, $4a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 일반항 a_n 을 구하면?

① $\frac{1}{n}$

② $\frac{1}{2n-1}$

③ $\frac{1}{3n-2}$

④ $\frac{1}{4n-3}$

⑤ $\frac{1}{5n-4}$

해설

$4a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}$ 의 양변을 a_na_{n+1} 로 나누면

$$4 = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \times 4 = 4n-3$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{4n-3}$$

28. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 일반항 a_n 은?

- ① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ③ $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$
 ④ 2^{n-1} ⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ 의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$ 에서 $\frac{\alpha}{2} = 1 \therefore \alpha = 2$

즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

따라서 수열 $\{a_n - 2\}$ 는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인

등비수열이므로

$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

29. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이고,
 $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
 $= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

30. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = \begin{cases} 2n+1 & (n \text{이 홀수}) \\ 2^{\frac{n}{2}} & (n \text{이 짝수}) \end{cases} \text{ 일 때, } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m} \text{의 값은?}$$

(단, m 은 자연수)

- ① $2m^2 + m + 2^m$
- ② $2m^2 + 2m + 2^{m+1}$
- ③ $2m^2 + m + 2^{m+1} - 2$
- ④ $2m^2 + m + 2^{m+1} - 1$
- ⑤ $2m^2 + m + 2^{m+1}$

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 홀수 번째 항으로 이루어진 수열은 3, 7, 11, 15, ...
이므로

공차가 4인 등차수열이고 처음 m 개의 항의 합은

$$\frac{m\{2 \cdot 3 + (m-1) \cdot 4\}}{2} = 2m^2 + m$$

수열 $\{a_n\}$ 의 짝수 번째 항으로 이루어진 수열은 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , ...

이므로 공비가 2인 등비수열이고 처음 m 개의 항의 합은

$$\frac{2(2^m - 1)}{2 - 1} = 2^{m+1} - 2$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m} = 2m^2 + m + 2^{m+1} - 2$$

31. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{에서 } n \geq 25, \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

32. 높이가 h 인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n 번째 날의 탑의 높이를 a_n 이라 하면 $(n+1)$ 째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n 과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$$a_1 = \frac{h}{2} \text{ 이고, } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{h}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$\therefore, a = \frac{h}{3} \text{ 이므로 } \frac{a}{h} = \frac{1}{3}$$

33. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - \text{㉡} > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

㉠ $n = 1, k^2$

㉡ $n = 1, (k+1)^2$

㉢ $n = 5, (k-1)^2$

㉣ $n = 5, k^2$

㉤ $n = 5, (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
 $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore$ ㉠ $n = 5, \text{㉡} (k+1)^2$