

1. $\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3x}$

해설

$$\frac{x-1}{3x-6} \times \frac{2x-4}{x^2-x} = \frac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \frac{2}{3x}$$

2. $-1 < x < 1$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} \\ &= |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2\end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

4. $a = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, $b = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 일 때 $a^3 + b^3$ 의 값을 구하면?

① $8\sqrt{2}$

② $9\sqrt{2}$

③ $10\sqrt{2}$

④ $12\sqrt{2}$

⑤ $15\sqrt{2}$

해설

$$a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

$$b = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore a + b = 2\sqrt{2}, ab = 1$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 10\sqrt{2}$$

5. $x = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x + y = 2\sqrt{3}, \quad xy = 1$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 1 = 11$$

6. $\frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c} = k$ 라 할 때, k 의 값으로 가능한 것을 모두 고르면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

(분모의 합) = $a + 2b + 3c$

i) $a + 2b + 3c = 0$ 일 때

$$2b + 3c = -a, \quad 3c + a = -2b, \quad a + 2b = -3c \text{ 이므로}$$

주어진 식에 각각 대입하면

$$\frac{-a}{a} = \frac{-2b}{2b} = \frac{-3c}{3c} = k$$

$$\therefore k = -1$$

ii) $a + 2b + 3c \neq 0$ 일 때

$$k = \frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c}$$

$$= \frac{2a+4b+6c}{a+2b+3c} \quad (\because \text{가비의 리})$$

$$= \frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c} = 2$$

i), ii) 에서 $k = -1$ 또는 $k = 2$

7. $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때,

$\sqrt{1 - 2x\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

② $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

③ $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

④ $\frac{7\sqrt{6}}{3}$

⑤ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - 2\sqrt{x^2(1-x^2)}} + \sqrt{1 + 2\sqrt{x^2(1-x^2)}} \\ &= \sqrt{x^2} - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2} \\ & \left(\because x^2 = \frac{2}{3} > 1-x^2 = \frac{1}{3} \right) \\ &= 2\sqrt{x^2} = 2x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

8. $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 일 때 $\frac{x^3 + x^2 - 3x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x + 9}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ 에서}$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{분자 : } x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x - 1) + 5 = 5$$

$$\text{분모 : } x^4 + 2x^3 + 2x + 9$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 10 = 10$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

9. $x + y + z = 3$ 일 때

$$\frac{(x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \text{의 값은?}$$

① 0

② 1

③ $\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ -1

해설

$$x + y + z = 3 \text{ 일 때, } x + y + z - 3 = 0$$

$$\therefore (x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

$$x-1 = A, y-1 = B, z-1 = C \text{ 라 하면}$$

$$(A+B+C)^2$$

$$= A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA) \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{준식} = \frac{AB + BC + CA}{A^2 + B^2 + C^2}$$

① 에서 양변을 $A^2 + B^2 + C^2$ 으로 나누면

$$\frac{(A+B+C)^2}{A^2 + B^2 + C^2} = 1 + \frac{2(AB + BC + CA)}{A^2 + B^2 + C^2} = 0$$

$$(\because A+B+C=0)$$

$$\therefore \frac{AB + BC + CA}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{1}{2}$$

10. 양수 a 의 소수 부분을 b 라 할 때, $a^2 + b^2 = 8$ 을 만족하는 a 의 값을 구하면?

① $1 + \sqrt{3}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 - \sqrt{3}$

④ $1 - \sqrt{3}$

⑤ $3 + 2\sqrt{3}$

해설

(i) a 가 정수일 때,

$$b = 0, a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \text{ (모순)}$$

(ii) $a > 0$, 정수가 아닐 때 $b \neq 0$

a 의 정수부분을 k 라 하면

$$a = k + b \quad (0 < b < 1) \text{ 이라 하면}$$

$$a^2 + b^2 = 8 \text{ 에서 } b^2 = 8 - a^2$$

$$0 < 8 - a^2 < 1, \sqrt{7} < a < \sqrt{8}$$

$$\therefore k = 2 \quad \therefore b = a - 2$$

$$a^2 + (a - 2)^2 = 2a^2 - 4a + 4 = 8$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0, a = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore a = 1 + \sqrt{3} (\because a > 0)$$