1. $\dfrac{x-1}{3x-6} \times \dfrac{2x-4}{x^2-x}$ 를 계산하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{2}{3x}$

해설

$\dfrac{x-1}{3x-6} \times \dfrac{2x-4}{x^2-x} = \dfrac{2(x-1)(x-2)}{3x(x-2)(x-1)} = \dfrac{2}{3x}$

2. 분수식 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{x}$

해설

(준 식) $= 1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}} = 1+\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x}$

3. $\sqrt{\frac{5}{6}+\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt{\frac{5}{6}+\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$
$$=\sqrt{\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{6}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$\therefore x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2+3=5$

4. $\sqrt{4+\sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라 할 때, $(x+2y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1 = 2.\times\times\cdots$

$\therefore x = 2,\ y = (\sqrt{3}+1) - 2 = \sqrt{3}-1$

$(x+2y)^2 = \{2+2(\sqrt{3}-1)\}^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

5. $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{2+\sqrt{3}}$일 때, $\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}$의 값을 구하면?

① 3 ② $3\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$x=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$y=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$x+y=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$, $xy=\frac{3-1}{2}=1$

$\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{1}$

$=6\sqrt{6}-3\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

6. $\dfrac{3x^2-2xy}{x^2+xy+y^2}=2$일 때, $\dfrac{3(x-y)}{x+y}$의 값을 구하면? (단, $x>y>0$)

① $2\sqrt{6}+3$ ② $2\sqrt{6}-3$ ③ $3-2\sqrt{6}$
④ $3+2\sqrt{6}$ ⑤ $5-6\sqrt{2}$

해설

$3x^2-2xy=2x^2+2xy+2y^2$
$\therefore x^2-4xy-2y^2=0$이 식의 양변을 y^2으로 나누면
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4\left(\dfrac{x}{y}\right)-2=0$
$\therefore \dfrac{x}{y}=2+\sqrt{6}$ ($\because$ $x>y>0$에서 $\dfrac{x}{y}>1$)
$\therefore \dfrac{3(x-y)}{x+y}=\dfrac{3\left(\dfrac{x}{y}-1\right)}{\dfrac{x}{y}+1}=2\sqrt{6}-3$

7. 세 자연수 $a,\ b,\ c$가 $\frac{2b}{a}=\frac{3c}{2b}=\frac{a}{3c}$를 만족하고 $a,\ b,\ c$의 최소공배수가 12일 때, $a+b+c$의 값은?

① 22　　② 20　　③ 18　　④ 16　　⑤ 14

해설

$a+2b+3c \neq 0$ ($\because a,\ b,\ c$는 자연수) 이므로

가비의 리에 의하여

$\frac{2b}{a}=\frac{3c}{2b}=\frac{a}{3c}=\frac{a+2b+3c}{a+2b+3c}=1$에서

$a=3c,\ a=2b\ \ \therefore b=\frac{1}{2}a,\ \ c=\frac{1}{3}a$

$\therefore a : b : c = a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$

$= 6 : 3 : 2$

세 수의 최대공약수를 G라 하면

$a=6G,\ b=3G,\ c=2G$

(최소공배수)$=6G=12,\ G=2$

그러므로 $a=12,\ b=6,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=22$

8. 자연수 x, y, z에 대하여 $\sqrt{17+x\sqrt{2}} = y+z\sqrt{2}$가 성립할 때, $x+y+z$의 값을 구하면?

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

$\sqrt{17+x\sqrt{2}} = y+z\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$17+x\sqrt{2} = y^2+2z^2+2yz\sqrt{2}$

$\therefore\ y^2+2z^2 = 17 \cdots$ ㉠, $x = 2yz \cdots$ ㉡

㉠에서 $z=1$이면 $y=\sqrt{15}$이므로 자연수가 아니다.

$z=2$이면 $y^2=9\quad\therefore\ y=3$

$z=3$이면 $y^2=-1<0$이므로 모순

$\therefore\ x=12,\ y=3,\ z=2$

$\therefore\ x+y+z=17$

9. 일원 단위까지 계산된 어느 제품의 생산 가격의 4%를 이윤으로 붙인 판매 가격 n이 반올림 없이 100원 미만의 단위는 없다고 한다. 이 때, 최소의 n은?

① 100　　② 1300　　③ 2500

④ 2600　　⑤ 10000

해설

생산 가격을 m, 판매 가격을 n이라고 하면
판매 가격 n의 100원 미만의 단위는 없으므로
$n = 100a$(a는 자연수), $(1.04)\,m = 100a$
$8 \cdot 13 \cdot m = 100^2 a$, $m = 2 \cdot 5^4 \cdot \dfrac{a}{13}$
m이 자연수이기 위한 최소의 자연수 a는 13이다.
$\therefore\ n = 1300$

10. a가 실수일 때, $f(a) = \sqrt{(a+\sqrt{a^2})^2} - \sqrt{(a-\sqrt{a^2})^2}$을 간단히 하면?

① a　　② $2a$　　③ $-a$　　④ $-2a$　　⑤ 0

해설

$\sqrt{a^2} = |a|$이므로 $f(a) = |a+|a|| - |a-|a||$
$a \geq 0$인 경우와 $a < 0$인 경우로 나누어 생각하면
(i) $a \geq 0$일 때,
$f(a) = |a+a| - |a-a| = |2a| = 2a$
(ii) $a < 0$일 때,
$f(a) = |a-a| - |a-(-a)| = -|2a| = 2a$
따라서 모든 실수 a에 대하여 $f(a) = 2a$