1. 등차수열 11, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{100}, 213 에서 공차는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$b_1 = 2,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_2,\ \cdots,\ b_{101} = a_{100},$

$b_{102} = 213$

$b_{102} = 213 = 11 + (102 - 1) \cdot d$

$101d = 202$

$d = 2$

2. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\dfrac{12}{n}$ ② $\dfrac{8}{n}$ ③ $\dfrac{6}{n}$ ④ $\dfrac{3}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\} = \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \cdots$

$= \dfrac{1}{12}, \dfrac{2}{12}, \dfrac{3}{12}, \dfrac{4}{12}, \cdots$

따라서 등차수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\dfrac{n}{12}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{12}{n}$

3. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$S_n = 94$에서 $\dfrac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188 이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47 \quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4 \quad \therefore\ d = \dfrac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2 \quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1 \quad \therefore\ d = -\dfrac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

5. 제 3항이 -12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$ ② $(-3) \cdot 2^{n-1}$ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$
④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$ ⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = -12$
$a_6 = ar^5 = -96$
$r^3 = 8$
$\therefore r = 2$
$ar^2 = 4a = -12 \quad \therefore a = -3$
$\therefore a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$

6. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$일 때, a_4의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$a_n = a \cdot r^{n-1}$

$a_1 \cdot a_3 \cdot a_8$

$= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3 r^9$

$a^3 r^9 = (ar^3)^3 = 64 = 4^3$

$\therefore ar^3 = 4$

$\therefore a_4 = 4$

7. 등비중항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, $\boxed{}$안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$-2,\ \boxed{},\ -8,\ \boxed{},\ \boxed{},\ 64, \cdots$

① -11 ② -12 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8),\ b^2 = 16$
따라서 $b = 4$이고 공비는 -2인 수열이 되므로 구하는 수열은
$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ \cdots$
$\therefore\ 4 + 16 - 32 = -12$

8. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$a+b+c+d=9+6+4+36=55$

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_1 : a_4$는?(단, $a_1 \neq 0$이다.)

① $1 : 2$ ② $1 : 3$ ③ $2 : 3$ ④ $2 : 5$ ⑤ $3 : 5$

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4)$

$= (a_1 + a_1 + d) : (a_1 + 2d + a_1 + 3d) = 1 : 2$

$2a_1 + 5d = 4a_1 + 2d \quad \therefore\ 2a_1 = 3d$

$\therefore\ a_1 : a_4 = a_1 : (a_1 + 3d) = a_1 : 3a_1 = 1 : 3$

10. 수열 $\log\frac{1000}{3},\ \log\frac{1000}{9},\ \log\frac{1000}{27},\ \log\frac{1000}{81},\cdots$ 에서 첫째항부터 몇째 항까지의 합이 최대가 되는가? (단, $\log 3 = 0.4771$)

① 제 5항　　② 제 6항　　③ 제 7항

④ 제 8항　　⑤ 제 9항

해설

$$\log\frac{1000}{3} = \log 10^3 - \log 3 = 3 - \log 3$$

$$\log\frac{1000}{9} = 3 - 2\log 3$$

$$\log\frac{1000}{27} = 3 - 3\log 3$$

이므로 주어진 수열은

$a = 3 - \log 3$

$d = -\log 3$ 인 등차수열

$a_n = (3 - \log 3) + (n-1)\cdot(-\log 3)$

$= 3 - n\cdot\log 3$

그런데 $\log 3 = 0.4771$ 이므로

$a_6 = 3 - 6\log 3 = 0.1374$

$a_7 = 3 - 7\log^3 = -0.3397$

$\therefore$ 6번째 항까지의 합이 최대

11. 10행 10열로 이루어진 표에 다음 그림과 같이 1, 3, 4, 6이 쓰여 있다. 이 표의 나머지 칸에는 모든 행과 모든 열이 각각 등차수열을 이루도록 숫자가 쓰인다고 할 때, 이 표에 있는 모든 숫자의 합은?

	제1열	제2열	⋯	제10열
제1행	1	3		
제2행	4	6		
⋮				
제10행				

① 2200 ② 2250 ③ 2300 ④ 2350 ⑤ 2400

해설

제 n행의 수열의 합을 S_n이라 하면
제1행은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$S_1 = \frac{10(2\cdot 1+9\cdot 2)}{2} = 100$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 100, 공차가 $3\cdot 10 = 30$인 등차수열이므로

$$S_1+S_2+\cdots+S_{10} = \frac{10(2\cdot 100+9\cdot 30)}{2} = 2350$$

12. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^{1}$

(10년후 원리합계)

$= 1000$만$\times 1.04^{10}$

$= 1000$만 $\times 1.48$

$= 1480$만 (원)

13. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{3}(a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{3}(a_k - 1)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 60

해설

$\sum_{k=1}^{3}(a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{3}(a_k - 1)^2$
$= \sum_{k=1}^{3}(a_k + 2a_k + 1) - \sum_{k=1}^{3}(a_k^2 - 2a_k + 1)$
$= 4\sum_{k=1}^{3} a_k = 4(3^2 + 2 \times 3) = 60$

14. 수열 $1\cdot 1,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 4\cdot 7, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

15. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \left\{2(n-1)^2 - (n-1)\right\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$

16. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{11}{10}$ ③ $\frac{10}{11}$ ④ $\frac{20}{11}$ ⑤ $\frac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

17. 수열 $1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21, \cdots$ 의 제20항은?

① 377　② 379　③ 381　④ 383　⑤ 385

해설

$1,\quad 3,\quad 7,\quad 13,\quad 21, \cdots$

$\ \bigvee\quad \bigvee\quad \bigvee\quad \bigvee$

$\ \ 2\quad\ 4\quad\ 6\quad\ 8, \cdots$

주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 계차수열 $\{b_n\}$ 은 $2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots$ 로 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$

따라서 주어진 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하면

$a_{20} = a_1 + \sum_{k=1}^{19} 2k = 1 + \sum_{k=1}^{19} 2k$

$= 1 + 2 \cdot \dfrac{19 \cdot 20}{2} = 381$

18. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \dfrac{n(1-x^n)}{2}$

② $S = \dfrac{1-x^n}{2}$

③ $S = \dfrac{1-x^n}{2} - \dfrac{2x^n}{x}$

④ $S = \dfrac{1-x^n}{1+x} - \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \dfrac{1-x^n}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로 양변에 x를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -)\ xS = & \quad\ x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S = & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x \end{array}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

19. 수열 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, $\cdots$ 에서 첫째항부터 제 100항까지의 합은?

① 930 ② 945 ③ 950 ④ 955 ⑤ 960

해설

(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), $\cdots$ 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 n군의 항수는 n이므로 100번째 항은

$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} < 100$

에서 $\dfrac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제 14군의 9항이다.

그리고 제 n군까지의 합을 구해 보면

$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

첫째항부터 제 100항까지의 합 S_{100}은 제 13군까지의 합에 14를 9개 더한 값이 된다.

$\therefore S_{100} = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$

20. $a_{n+1} - a_n = 2(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\dfrac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}}$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

즉, $a_2 = a_1 + 2,\ a_3 = a_1 + 4,\ a_4 = a_1 + 6$

$\therefore \quad \dfrac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}} = \dfrac{2^{a_1+2} + 2^{a_1+6}}{2^{a_1} + 2^{a_1+4}}$

$= \dfrac{2^{a_1+2}(1+2^4)}{2^{a_1}(1+2^4)} = \dfrac{2^2 \cdot 2^{a_1}(1+2^4)}{2^{a_1}(1+2^4)} = 2^2 = 4$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10} 의 값은?

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

① $2 \cdot 3^8$　　② $2 \cdot 3^9$　　③ $2 \cdot 3^{10}$

④ $2 \cdot 3^{11}$　　⑤ $2 \cdot 3^{12}$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$ 에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ 이므로 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, 9$를 대입하여 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} \times \frac{a_6}{a_5} \times \frac{a_7}{a_6} \times \frac{a_8}{a_7} \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} = 3^9$$

$$\frac{a_{10}}{a_1} = 3^9$$

$\therefore\ a_{10} = a_1 \cdot 3^9 = 2 \cdot 3^9$

22. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_1 + 1^2 \\ & a_3 = a_2 + 2^2 \\ & a_4 = a_3 + 3^2 \\ & \quad \vdots \\ +) & \underline{a_{10} = a_9 + 9^2} \end{array}$$

$$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$$

$$= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$$

$$= 290$$

23. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면
$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$
$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$
$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

24. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의될 때, $a^{2014}a^{2015}a^{2016}$의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = -1,\ a_4 = 2,\ a_5 = \frac{1}{2},\ a_6 = -1,\ \cdots$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 $2,\ \frac{1}{2},\ -1$이 반복되는 수열이고

$a^{2014},\ a^{2015},\ a^{2016}$은 연속한 세 항의 곱이므로

$2 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -1$

25. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$일 때, (좌변)= (우변)=2

(ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n = 1$일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$

(ii) $n = k$일 때 성립한다고 가정하고, $n = k+1$을 대입하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$을 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1)\boxed{2(2k+1)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$

$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$

따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$

$\therefore \dfrac{g(k)}{f(k)} = 2^k$

$\therefore \dfrac{g(10)}{f(10)} = 1024$