

1. 등차수열 11, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 213$ 에서 공차는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$b_1 = 2, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots, b_{101} = a_{100},$$

$$b_{102} = 213$$

$$b_{102} = 213 = 11 + (102 - 1) \cdot d$$

$$101d = 202$$

$$d = 2$$

2. 조화수열 12, 6, 4, 3, ...의 일반항은?

① $\frac{12}{n}$

② $\frac{8}{n}$

③ $\frac{6}{n}$

④ $\frac{3}{n}$

⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \dots$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$$\therefore a_n = \frac{12}{n}$$

3. 첫째항이 1 이고 공차가 자연수 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $n \geq 3$ 일 때, $S_n = 94$ 를 만족하는 d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$S_n = 94 \text{에서 } \frac{n\{2 + (n-1)d\}}{2} = 94$$

$$n\{2 + (n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 n 의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188이다.

$$n = 4 \text{일때, } 2 + (4-1)d = 47 \quad \therefore d = 15$$

$$n = 47 \text{일때, } 2 + (47-1)d = 4 \quad \therefore d = \frac{2}{23}$$

$$n = 94 \text{일때, } 2 + (94-1)d = 2 \quad \therefore d = 0$$

$$n = 188 \text{일때, } 2 + (188-1)d = 1 \quad \therefore d = -\frac{1}{187}$$

이 중에서 d 가 자연수가 되는 것은 $n = 4$ 이므로 $d = 15$

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} \text{ 이므로 } a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$$

5. 제 3항이 -12 이고 제 6항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = -12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$ar^2 = 4a = -12 \quad \therefore a = -3$$

$$\therefore a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$$

6. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$ 일 때, a_4 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 \cdot a_3 \cdot a_8$$

$$= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3 r^9$$

$$a^3 r^9 = (ar^3)^3 = 64 = 4^3$$

$$\therefore ar^3 = 4$$

$$\therefore a_4 = 4$$

7. 등비중항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, 안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$$-2, \square, -8, \square, \square, 64, \dots$$

① -11

② -12

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b 라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8)$, $b^2 = 16$

따라서 $b = 4$ 이고 공비는 -2 인 수열이 되므로 구하는 수열은
 $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$

$$\therefore 4 + 16 - 32 = -12$$

8. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a + b + c + d$ 의 값은?(단, a, b, c, d 는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

- ① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$$a + b + c + d = 9 + 6 + 4 + 36 = 55$$

9. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$ 가 성립할 때, $a_1 : a_4$ 는?(단, $a_1 \neq 0$ 이다.)

① $1 : 2$

② $1 : 3$

③ $2 : 3$

④ $2 : 5$

⑤ $3 : 5$

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4)$$

$$= (a_1 + a_1 + d) : (a_1 + 2d + a_1 + 3d) = 1 : 2$$

$$2a_1 + 5d = 4a_1 + 2d \quad \therefore 2a_1 = 3d$$

$$\therefore a_1 : a_4 = a_1 : (a_1 + 3d) = a_1 : 3a_1 = 1 : 3$$

10. 수열 $\log \frac{1000}{3}, \log \frac{1000}{9}, \log \frac{1000}{27}, \log \frac{1000}{81}, \dots$ 에서 첫째항부터 몇째 항까지의 합이 최대가 되는가? (단, $\log 3 = 0.4771$)

① 제 5항

② 제 6항

③ 제 7항

④ 제 8항

⑤ 제 9항

해설

$$\begin{aligned}\log \frac{1000}{3} &= \log 10^3 - \log 3 \\ &= 3 - \log 3\end{aligned}$$

$$\log \frac{1000}{9} = 3 - 2 \log 3$$

$$\log \frac{1000}{27} = 3 - 3 \log 3$$

이므로 주어진 수열은

$$a = 3 - \log 3$$

$d = -\log 3$ 인 등차수열

$$\begin{aligned}a_n &= (3 - \log 3) + (n - 1) \cdot (-\log 3) \\ &= 3 - n \cdot \log 3\end{aligned}$$

그런데 $\log 3 = 0.4771$ 이므로

$$a_6 = 3 - 6 \log 3 = 0.1374$$

$$a_7 = 3 - 7 \log 3 = -0.3397$$

$\therefore$ 6 번째 항까지의 합이 최대

11. 10행 10열로 이루어진 표에 다음 그림과 같이 1, 3, 4, 6이 쓰여 있다. 이 표의 나머지 칸에는 모든 행과 모든 열이 각각 등차수열을 이루도록 숫자가 쓰인다고 할 때, 이 표에 있는 모든 숫자의 합은?

	제1열	제2열	...	제10열
제1행	1	3		
제2행	4	6		
⋮				
제10행				

- ① 2200 ② 2250 ③ 2300 ④ 2350 ⑤ 2400

해설

제 n 행의 수열의 합을 S_n 이라 하면

제1 행은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$S_1 = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 100, 공차가 $3 \cdot 10 = 30$ 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} &= \frac{10(2 \cdot 100 + 9 \cdot 30)}{2} \\ &= 2350 \end{aligned}$$

12. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단, $1.04^{10} = 1.48$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

$$\begin{aligned} & 1 \text{ 년후 원리합계는 } 1000 \text{ 만} \times (1.04)^1 \\ & (10 \text{ 년후 원리합계}) \\ & = 1000 \text{ 만} \times 1.04^{10} \\ & = 1000 \text{ 만} \times 1.48 \\ & = 1480 \text{ 만 (원)} \end{aligned}$$

13. $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^3 (a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^3 (a_k - 1)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 (a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^3 (a_k - 1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 (a_k + 2a_k + 1) - \sum_{k=1}^3 (a_k^2 - 2a_k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^3 a_k = 4(3^2 + 2 \times 3) = 60 \end{aligned}$$

14. 수열 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

15. $\sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$$

따라서 $a_n = 4n - 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k+1)(4k-3) \\ &= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k - 3) \\ &= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5 \\ &= 440 - 30 - 15 = 395 \end{aligned}$$

16. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\frac{9}{10}$

② $\frac{11}{10}$

③ $\frac{10}{11}$

④ $\frac{20}{11}$

⑤ $\frac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{20}{11}$$

17. 수열 1, 3, 7, 13, 21, ... 의 제20항은?

① 377

② 379

③ 381

④ 383

⑤ 385

해설

1, 3, 7, 13, 21, ...

∨ ∨ ∨ ∨

2 4 6 8, ...

주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 계차수열 $\{b_n\}$ 은
2, 4, 6, 8, ... 로 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$$

따라서 주어진 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$a_{20} = a_1 + \sum_{k=1}^{19} 2k = 1 + \sum_{k=1}^{19} 2k$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{19 \cdot 20}{2} = 381$$

18. 수열의 합 $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 1$)

① $S = \frac{n(1-x^n)}{2}$

② $S = \frac{1-x^n}{2}$

③ $S = \frac{1-x^n}{2} - \frac{2x^n}{x}$

④ $S = \frac{1-x^n}{1+x} - \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$

⑤ $S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$

해설

등차수열과 등비수열의 곱으로 이루어진 멱급수의 형태이므로
양변에 x 를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} \\ -) xS &= \quad x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^n \\ \hline (1-x)S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n \cdot x^n \end{aligned}$$

$$= \frac{1(1-x^n)}{1-x} - n \cdot x^n$$

$$\therefore S = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

19. 수열 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... 에서 첫째항부터 제 100 항까지의 합은?

① 930

② 945

③ 950

④ 955

⑤ 960

해설

(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), ... 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 n 군의 항수는 n 이므로 100 번째 항은

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} < 100$$

에서 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제 14 군의 9 항이다.

그리고 제 n 군까지의 합을 구해 보면

$$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 이므로}$$

첫째항부터 제 100 항까지의 합 S_{100} 은 제 13 군까지의 합에 14 를 9 개 더한 값이 된다.

$$\therefore S_{100} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$$

20. $a_{n+1} - a_n = 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 2$$

$$\text{즉, } a_2 = a_1 + 2, a_3 = a_1 + 4, a_4 = a_1 + 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}} &= \frac{2^{a_1+2} + 2^{a_1+6}}{2^{a_1} + 2^{a_1+4}} \\ &= \frac{2^{a_1+2}(1 + 2^4)}{2^{a_1}(1 + 2^4)} = \frac{2^2 \cdot 2^{a_1}(1 + 2^4)}{2^{a_1}(1 + 2^4)} = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같이 정의될 때, a_{10} 의 값은?

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$$

① $2 \cdot 3^8$

② $2 \cdot 3^9$

③ $2 \cdot 3^{10}$

④ $2 \cdot 3^{11}$

⑤ $2 \cdot 3^{12}$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$ 에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ 이므로 양변에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를

대입하여 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} \times \frac{a_6}{a_5} \times \frac{a_7}{a_6} \times \frac{a_8}{a_7} \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} = 3^9$$

$$\frac{a_{10}}{a_1} = 3^9$$

$$\therefore a_{10} = a_1 \cdot 3^9 = 2 \cdot 3^9$$

22. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여
변끼리 더하면

$$\begin{array}{r} a_1 = a_1 + 1^2 \\ a_2 = a_1 + 1^2 + 2^2 \\ a_3 = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ \vdots \\ a_9 = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 \\ +) a_{10} = a_9 + 9^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2) \\ &= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} \\ &= 290 \end{aligned}$$

23. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 수열 $\{a_n\}$ 이 정의될 때, a_n 을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$$

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의될 때,
 $a^{2014} a^{2015} a^{2016}$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = \frac{1}{2}, a_6 = -1, \dots$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, \frac{1}{2}, -1$ 이 반복되는 수열이고

$a^{2014}, a^{2015}, a^{2016}$ 은 연속한 세 항의 곱이므로

$$2 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -1$$

25. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$$

$$= (2n)(2n-1) \dots (n+2)(n+1) \dots \textcircled{㉠}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = (우변) = 2

(ii) $n = k$ 일 때 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$$

$$= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(k+1) \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}$ 의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 곱하면

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{\text{(나)}}$$

$$= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{\text{(가)}}$$

$$= (2k+2)(2k+1)(2k) \dots (k+2)$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$ 라 할

때, $\frac{g(10)}{f(10)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{1024}$

② $\frac{1}{512}$

③ 512

④ 1024

⑤ 2048

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$

(ii) $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하고, $n = k+1$ 을 대입하면

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$$

$$= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(k+1) \dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$ 을 곱하면

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1) \boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$$

$$= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(k+1) \boxed{2(2k+1)}$$

$$= (2k)(2k-1) \dots (k+2)(2k+2)(2k+1)$$

$$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \dots (k+2)$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

$$\text{즉, } f(k) = 2(2k+1), g(k) = (2k+1)2^{k+1}$$

$$\therefore \frac{g(k)}{f(k)} = 2^k$$

$$\therefore \frac{g(10)}{f(10)} = 1024$$