1. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11　② 21　③ 25　④ 81　⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

2. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50　　② 62　　③ 64　　④ 79　　⑤ 83

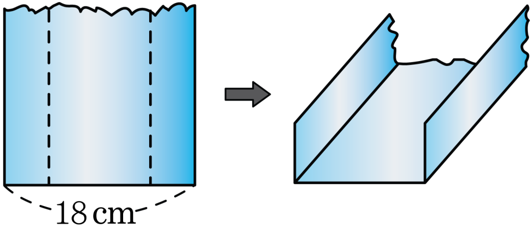
해설

두 수를 각각 x, $16-x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} y &= x(16-x) \\ &= -x^2+16x \\ &= -(x^2-16x+64-64) \\ &= -(x-8)^2+64 \end{aligned}$$

$x=8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

3. 다음 그림과 같이 너비가 18cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 되도록 하려면 물받이의 높이를 얼마로 해야 하는가?



① 4.5 cm ② 4.0 cm ③ 3.8 cm

④ 3.6 cm ⑤ 3.4 cm

해설

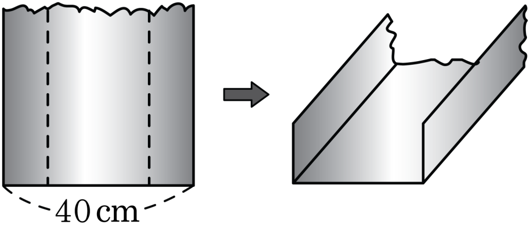
물받이의 높이를 x 라 할 때,

단면의 넓이는 $y = x(18 - 2x)$

$$y = -2x^2 + 18x = -2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$$

따라서 $x = \frac{9}{2}$(cm) 일 때, 최대값 $\frac{81}{2}$(cm^2)를 갖는다.

4. 너비가 40cm 인 양철판을 구부려서 'ㄷ'자 모양의 물받이를 만들었다. 물받이의 단면적의 넓이가 최대가 되는 높이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10 cm

해설

양철판의 높이를 $x$cm 라고 두고 단면적의 넓이를 y cm^2 라고 두면

$$\begin{aligned} y &= x(40-2x) \\ &= -2x^2+40x \\ &= -2(x^2-20x+100)+200 \\ &= -2(x-10)^2+200 \end{aligned}$$ 이다.

따라서 $x=10$ 일 때, 최댓값 200 을 가진다.

5. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{15}{2}$m ② 8m ③ $\frac{17}{2}$m ④ 3m ⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라 하면

$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$ m 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}$ m^2 을 가진다.

6. 과학 탐구 반 학생들이 물 로켓을 발사하는데 위로 똑바로 쏘아 올린 물 로켓의 t 초 후의 높이가 $(40t-8t^2)$m 이다. 이 때 물 로켓이 올라갈 수 있는 최대 높이는?

① 30m ② 35m ③ 40m ④ 45m ⑤ 50m

해설

높이를 h 라 하면

$$h=-8t^2+40t=-8\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+50$$

$\therefore$ 50m

7. 지면으로부터 초속 40m 로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ 초

▶ 답 : ______ m

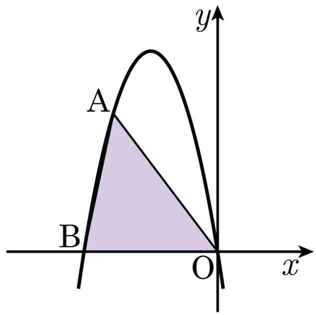
▷ 정답 : 4 초

▷ 정답 : 80 m

해설

$y = -5x^2 + 40x$ 에서 $y = -5(x-4)^2 + 80$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 80 을 갖는다.

8. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0),\ (-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OB}\times 9=\dfrac{1}{2}\times 6\times 9=27$

9. 어느 공장에서 생산하는 제품은 50 개를 생산할 때까지는 개당 5000 원의 비용이 들어가고 51 개 부터는 생산량이 1 개씩 증가할 때마다 개당 10 원씩 추가로 감소한다. 예컨대 51 개, 52 개의 제품을 생산할 때의 생산 비용이 각각 개당 4990 원, 4980 원이다. 이 때 총 생산 비용이 최대가 될 때의 개당 생산 비용을 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ 원

▷ 정답 : 2750 원

해설

생산량을 x개라 하면

(1) $x \le 50$ 일 때

(총 생산 비용) $= 5000 \times x = 5000x$

따라서 $x = 50$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 250000 원이다.

(2) $x > 50$ 일 때

(개당 생산 비용) $= 5000 - 10(x - 50) - 10x + 5500$

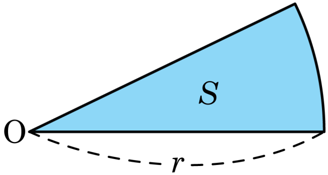
$$
\begin{aligned}
(\text{총 생산 비용}) &= (5500 - 10x)x \\
&= -10x^2 + 5500x \\
&= -10(x - 275)^2 + 756250
\end{aligned}
$$

따라서 $x = 275$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 756250 원이다.

(1), (2)에 의하면 생산량 275 개일 때, 총 생산 비용이 최대이다.

이 때, 개당 생산 비용은 2750 원이다.

10. 둘레의 길이가 12cm 인 부채꼴의 반지름의 길이가 $r$cm 일 때, 넓이를 S cm^2 라고 한다. S 가 최대일 때, r 의 값은? (단, 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}lr$ 임을 이용하여라.)



① 3 ② 6 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

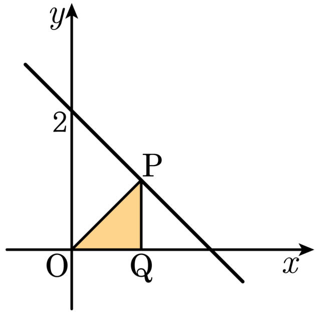
해설

둘레의 길이가 12cm 인 부채꼴의 반지름을 r cm 이라 하면 호의 길이는 $(12-2r)$ cm 이다.

$$(\text{부채꼴의 넓이}) = \frac{1}{2}r(12-2r) = -r^2+6r$$
$$= -(r-3)^2+9$$

따라서 $r=3$ 일 때, 부채꼴의 최대의 넓이는 9 이다.

11. 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q, △POQ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면 위의 점이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$ 라 하고,
△POQ 의 넓이를 y 라 하면

$$y=\frac{1}{2}a(-a+2)$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}a^2+a=-\frac{1}{2}(a^2-2a) \\ &= -\frac{1}{2}(a^2-2a+1-1) \\ &= -\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.