1. 다음은 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0\ (a\neq 0)$을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단, $b^2-ac\geq 0$)

$ax^2+2bx+c=0\,(a\neq 0)$

$x^2+\frac{2b}{a}x=-\frac{c}{a}$

$x^2+\frac{2b}{a}x+①=-\frac{c}{a}+①$

$(x+②)^2=③$

$x=④\pm⑤$

① $\frac{b^2}{a^2}$ ② $\frac{b}{a}$ ③ $\frac{b^2-ac}{a^2}$

④ $-\frac{b}{a}$ ⑤ $\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a^2}$

해설

$ax^2+2bx+c=0\,(a\neq 0)$

양변을 a 로 나누고 상수항을 이항하면

$x^2+\frac{2b}{a}x=-\frac{c}{a}$,

양변에 $\frac{b^2}{a^2}$ 을 더하면

$x^2+\frac{2b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}$

$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-ac}{a^2}$

$x+\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$x=-\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$

∴ ⑤가 잘못 되었다.

2. 이차방정식 $x^2 - x - 3 = 0$의 두 근을 a, b라 하고 $3x^2 + 4x + 1 = 0$의 두 근을 c, d라 할 때, $a + b + c + d$의 값은?

① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ 0

해설

$x^2 - x - 3 = 0$의 두 근을 구하면

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ 이고,

$3x^2 + 4x + 1 = 0$ 의 두 근을 구하면

$x = \frac{-4 \pm 2}{6}$ 이므로

$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + \frac{1 - \sqrt{13}}{2} - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

3. 이차방정식 $2x^2 - 6x - 5 = 0$ 을 풀었더니 $x = \dfrac{A \pm \sqrt{B}}{2}$ 가 되었다. $A - B$ 의 값은?

① 16 ② −16 ③ 12 ④ −12 ⑤ −10

해설

$2x^2 - 6x - 5 = 0$

$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 + 10}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{19}}{2}$

$A = 3,\ B = 19$

$\therefore A - B = 3 - 19 = -16$

4. 이차방정식 $(x-2)(x-1)-\frac{1}{3}(x^2+1)=3(x-3)$의 근은?

① $x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{3}$ ② $x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{2}$ ③ $x=\frac{-9\pm\sqrt{17}}{3}$
④ $x=\frac{-9\pm\sqrt{17}}{2}$ ⑤ $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

해설

양 변에 3을 곱하여 정리하면 $2x^2-18x+32=0$이다.
$x^2-9x+16=0$
$\therefore\ x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{2}$

5. 두 방정식 $x^2-0.3x-0.1=0$, $\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}=0$에 대하 공통근은?

① $-\frac{1}{5}$ ② -3 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 2

해설

i) $x^2-0.3x-0.1=0$

$10x^2-3x-1=0$

$(5x+1)(2x-1)=0$

$\therefore\ x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

ii) $\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}=0$

$2x^2+5x-3=0$

$(2x-1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=-3$

따라서 공통근은 $x=\frac{1}{2}$이다.

6. $(x-y)(x-y-4)+4=0$ 일 때, $x-y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x-y)(x-y-4)+4=0$
$x-y$ 를 A 로 치환하면,
$A(A-4)+4=0$
$A^2-4A+4=0,\ (A-2)^2=0$
$(x-y-2)^2=0$
$x-y-2=0$
$\therefore\ x-y=2$

7. $(x^2-4x)^2-(x^2-4x)-20=0$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x=-1$

▷ 정답: $x=2$

▷ 정답: $x=5$

해설

$x^2-4x=A$ 로 놓으면
$A^2-A-20=0,\quad (A-5)(A+4)=0$
$A=5$ 또는 $A=-4$
(i) $x^2-4x=5,\ x^2-4x-5=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$\therefore x=5$ 또는 $x=-1$
(ii) $x^2-4x=-4,\ x^2-4x+4=0\,(x-2)^2=0$
$\therefore x=2$

8. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 근을 갖는 것을 모두 골라라.

㉠ $2x^2-5x-3=0$	㉡ $4x^2+1=0$
㉢ $x^2-2x+4=0$	㉣ $2x^2-6x+1=0$
㉤ $9x^2+6x+1=0$	

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $2x^2-5x-3=0,\ x=-\frac{1}{2},3$ 이다.

㉡ $D=-4\times4\times1=-16<0$ 이므로 근이 없다.

㉢ $D=(-2)^2-4\times4=-12<0$ 이므로 근이 없다.

㉣ $2x^2-6x+1=0$, $x=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$ 이다.

㉤ $(3x+1)^2=0,\ x=-\frac{1}{3}$ 로 중근이다.

9. 다음 이차방정식 중에서 근의 개수가 다른 하나는?

① $2x^2+5x-2=0$　② $3x^2+7x-2=0$

③ $2x^2-3x-1=0$　④ $x^2+2x+4=0$

⑤ $(x-2)^2=6$

해설

④ $\frac{D}{4}=1-1\times 4<0$: 근이 없다.

나머지는 근이 2개이다.

10. 이차방정식 $x^2-(k+1)x+9=0$ 이 중근을 가질 때의 k 의 값이 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 37

해설

$x^2-(k+1)x+9=0$ 이 중근을 가지므로
$k+1=6$ 또는 $k+1=-6$ 이다.
$x^2+ax+b=0$ 에 $x=-7,\ x=5$ 을 대입하여 연립하여 풀면
$a=2,\ b=-35$ 이다.
$\therefore\ a-b=37$

11. 이차방정식 $3x^2 - 2x + m = 0$ 의 두 근의 곱과 해가 다음과 같을 때,$m + a + b$ 의 값은?
(단, m 는 상수, a 와 b 은 유리수)

두 근의 곱 : -4 해 : $\dfrac{a \pm \sqrt{b}}{3}$

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 25 ⑤ 26

해설

(두 근의 곱)$= \dfrac{m}{3} = -4$

$\therefore m = -12$

(두 근의 합)$= \dfrac{2}{3} = \dfrac{2a}{3}$

$\therefore a = 1$

$\left(\dfrac{a + \sqrt{b}}{3}\right) \times \left(\dfrac{a - \sqrt{b}}{3}\right) = \dfrac{a^2 - b}{9} = \dfrac{1 - b}{9} = -4$

$\therefore b = 37$

$\therefore m + a + b = -12 + 1 + 37 = 26$

12. 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 -3, $\frac{2}{3}$ 일 때, $a-b$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 13 ④ 14 ⑤ 16

해설

(두 근의 합) $=-\frac{a}{3}=-3+\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}$

$\therefore\ a=7$

(두 근의 곱) $=\frac{b}{3}=(-3)\times\left(\frac{2}{3}\right)=-2$

$\therefore\ b=-6$

$\therefore\ a-b=7-(-6)=13$

13. 이차방정식 $3x^2+12x+3=0$ 의 한 근을 a 라고 할 때, $a+\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.(단,$a \neq 0$)

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$3x^2+12x+3=0$ 의 한 근이 a 이므로 $3x^2+12x+3=0$ 에 a 를 대입하면

$a^2+4a+1=0$,

각 항을 a 로 나누면 $a+4+\frac{1}{a}=0$,

$\therefore\ a+\frac{1}{a}=-4$

14. 한 근이 $3+\sqrt{6}$ 인 이차방정식 $ax^2-2x+b=0$ 이 있을 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$ax^2-2x+b=0$ 의 계수가 모두 유리수이므로
$3+\sqrt{6}$ 가 근이면 $3-\sqrt{6}$ 도 근이다.

$\frac{b}{a}=(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})=3$

$\therefore \frac{b}{a}=3$

15. 이차방정식 $ax^2+bx-1=0$ 의 한 근이 $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ 일 때, 상수 a, b 의 값을 알맞게 구한 것은? (단, 두 근의 합과 곱은 모두 유리수)

① $a=2,\ b=-4$ ② $a=4,\ b=4$

③ $a=-4,\ b=2$ ④ $a=-4,\ b=-4$

⑤ $a=-2,\ b=-4$

해설

한 근이 $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ 이므로 다른 한 근은 $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

두 근의 곱은 $=\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{a}$

$-\frac{1}{4}=-\frac{1}{a}$

$\therefore\ a=4$

두 근의 합은 $\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{b}{a}$

$-1=-\frac{b}{4}$

$\therefore\ b=4$

16. 이차방정식 $x^2-(2a+3)x+a^2+3a=0$ 의 한 근이 다른 한 근의 2 배 일 때, a 의 값은? (a 는 상수)

① 3 ② -3 ③ 6 ④ $-3, 6$ ⑤ $3, -6$

해설

두 근을 각각 p, $2p$ 라고 하면, 근과 계수와의 관계에 의해

$p+2p=2a+3$, $2p^2=a^2+3a \cdots$ ㉠

$3p=2a+3, p=\dfrac{2a+3}{3}$ 를 ㉠에 대입하면

$2\times\left(\dfrac{2a+3}{3}\right)^2=a^2+3a$, $2(2a+3)^2=9a^2+27a$

정리하면 $a^2+3a-18=0$, $(a+6)(a-3)=0$

$\therefore a=-6,\ 3$

17. 어떤 자연수에 2를 더하여 제곱해야 할 것을 잘못하여 2를 더하여 2배 하였더니 48만큼 작아졌다. 어떤 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

어떤 자연수를 x라고 하면
$(x+2)^2 = 2(x+2) + 48$
$x^2 + 2x - 48 = 0$
$(x-6)(x+8) = 0$
x는 자연수이므로 $x = 6$ 이다.

18. x 에 대한 이차방정식의 일차항의 계수를 잘못보고 풀었더니 근이 -5 , -1 이었고 상수항을 잘못보고 풀었더니 근이 2, 4 가 되었다. 이 이차방정식의 옳은 근을 구하면?

① $x=1$ 또는 $x=-5$ ② $x=-1$ 또는 $x=5$

③ $x=1$ 또는 $x=5$ ④ $x=-1$ 또는 $x=4$

⑤ $x=-5$ 또는 $x=2$

해설

원래 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ 이라 하면
$b=(-5)\times(-1)=5$, $-a=2+4=6$
따라서 $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)=0$ 이다.
$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

19. 이차방정식 $ax^2 + bx - 10 = 0$ 의 해가 $-2,\ 5$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

근과 계수와의 관계에 의해

두 근의 합은 $-2 + 5 = -\dfrac{b}{a}$

두 근의 곱은 $-2 \times 5 = -10 = \dfrac{-10}{a}$

$\therefore\ a = 1,\ b = -3$

$\therefore\ a + b = -2$

20. x 에 관한 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$ 의 해가 $-\frac{1}{2}$, 1 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

이차방정식 $ax^2+bx+1=0$ 에서

두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이고, 두 근의 곱은 $\frac{1}{a}$

$-\frac{b}{a}=\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $a=-2,\ b=1$

$\therefore$ $a+b=-2+1=-1$

21. 이차방정식 $x^2 - 6x - 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, x^2 의 계수는 4이다.)

① $6x^2 + 4x - 1 = 0$ ② $3x^2 + 6x + 1 = 0$

③ $2x^2 + 6x + 1 = 0$ ④ $4x^2 + 6x + 1 = 0$

⑤ $4x^2 + 6x - 1 = 0$

해설

이차방정식 $x^2 - 6x - 4 = 0$의 두 근이 α, β 일때, $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = -4$

$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$

$\therefore x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

양변에 4를 곱하면 $4x^2 + 6x - 1 = 0$

22. 이차방정식 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근의 합을 a, 두 근의 곱을 b 라고 할 때, $x^2 - bx + a = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 1$

▷ 정답: $x = 5$

해설

$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = 2$ 또는 $x = 3$
$a = 5,\ b = 6$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x-1)(x-5) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 5$

23. 방정식 $(2-x-y)^2-(x^2+y^2)=4$ 를 만족하는 자연수의 순서쌍 $(x,\ y)$ 에 대하여 x^2+y^2 의 값을 구하여라. (단 $x \neq y$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

$(2-x-y)^2-(x^2+y^2)=4$,
$xy-2(x+y)=0$, $(x-2)(y-2)=4$

$x-2$	1	2	4	-1	-2	-4
$y-2$	4	2	1	-4	-2	-1

이 중에서 x, y가 자연수인 경우는 (단, $x \neq y$)

x	3	6
y	6	3

따라서 $x^2+y^2=3^2+6^2=45$ 이다.

24. 이차방정식 $4x^2 - 32x + k + 4 = 0$의 근이 1개일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = 60$

해설

$4x^2 - 32x + k + 4 = 0$
$4(x^2 - 8x) = -k - 4$
$4(x^2 - 8x + 16) = -k - 4 + 64$
$4(x - 4)^2 = -k + 60$
중근을 가져야 하므로 $-k + 60 = 0$, $k = 60$ 이다.