1. 수열 $\log 3, \log 9, \log 27, \cdots$ 의 제 101 항은?

① $10 \log 3$ ② $99 \log 3$ ③ $100 \log 3$
④ $101 \log 3$ ⑤ $102 \log 3$

해설

$a_1 = \log 3$
$a_2 = \log 9 = 2 \log 3$
$a_3 = \log 27 = 3 \log 3$
$\vdots$
$a_n = n \log 3$
$\therefore a_{101} = 101 \log 3$

2. 첫째항이 1, 공비가 8 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = \log_2 a_n$ 으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 135

해설

$a_n = 8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3}$

$b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{3n-3}$

b_n 은 첫째항이 0, 공차가 3 인 등차수열

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 3\}}{2}$$

$$= 5 \cdot 27 = 135$$

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

4. 수열 $1,\ a,\ \frac{1}{16},\ b, \cdots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

첫째항$= 1$, 공비$= a$

$a_n = a^{n-1}$

$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm\frac{1}{4}$

$a_4 = a^3 = \pm\frac{1}{64} = b$

$\therefore \frac{\pm\frac{1}{4}}{\pm\frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16$($\because$복호동순)

5. 수열 ω, ω^3, ω^5, ω^7, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$S = \dfrac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \dfrac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$

$\therefore\ S = \dfrac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \dfrac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$

6. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b,\ a,\ a+b$라 하면 세 수의 합이 12이므로

$(a-b)+a+(a+b)=12,\ 3a=12$

$\therefore a=4$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$(4-d)\times 4\times(4+d)=28,\ 16-d^2=7$

$d^2=9\ \ \therefore d=\pm 3$

따라서 구하는 세 수는 $1, 4, 7$이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

7. 두 수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{1}{3}$의 사이에 세 개의 수 x, y, z를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 조화수열을 이루려면 7, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 3이 등차수열을 이루어야 하므로

$\frac{1}{x}=6$, $\frac{1}{y}=5$, $\frac{1}{z}=4$

$\therefore$ $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{4}$

$\therefore$ $60(x+y+z)=60\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=60\cdot\frac{37}{60}=37$

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = -n^2 + 2n$일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -280

해설

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$
$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10})$
$= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10)$
$= -360 - (-80) = -280$

9. $A=2^{2014}$, $B=3^{2014}$이라 할 때, 6^{2014}의 양의 약수의 총합을 A와 B로 나타내면?

① $\frac{1}{2}(2A-1)(3B-1)$ ② $\frac{1}{3}(2A-1)(3B-1)$
③ $(2A-1)(3B-1)$ ④ $(2A+1)(3B+1)$
⑤ $\frac{1}{2}(2A+1)(3B+1)$

해설

$6^{2014}=2^{2014}\times 3^{2014}$이므로 6^{2014}의 양의 약수의 총합은

$(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2014})(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{2014})$

$=\frac{2^{2015}-1}{2-1}\times\frac{3^{2015}-1}{3-1}$

$=(2^{2015}-1)\cdot\frac{3^{2015}-1}{2}$

$=\frac{1}{2}(2A-1)(3B-1)$

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ 일 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

㉠ $a_3 = 36$

㉡ $\{a_n\}$은 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$은 등차수열이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$
$a_1 = S_1 = 4$이므로
$a_n = (2 \cdot 3^n - 2) - (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$
㉠ $a_3 = 36$
㉡ $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.
㉢ $\{\log_{10} a_n\}$은 첫째항이 $\log_{10} 4$, 공차가 $\log_{10} 3$인 등차수열이다.

11. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① 2250　② 2500　③ 2750　④ 3000　⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l-1$(단, $l \geq 0$인 정수)의 꼴이고,
6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m-1$(단, $m \geq 0$인 정수)의 꼴이다.
따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x라고 하면
$x = 4l - 1 = 6m - 1$을 만족해야 하므로 $x + 1 = 4l = 6m$
즉, $x + 1 = 12n$, 즉, $x = 12n - 1$($n \geq 1$ 인 정수)
따라서 조건을 만족하는 수열은 $11,\ 23,\ 35, \cdots$ 로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20항까지의 합은
$\dfrac{20(2 \cdot 11 + 19 \cdot 12)}{2} = 2500$

12. 30년간 자동차회사에 근무하던 사람이 명예퇴직을 하면서 퇴직금으로 2억 4천만 원을 받을 예정인데 이 돈을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액씩 연금 형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 연이율 5%의 복리로 10년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은 얼마인가? (단, $1.05^{10} = 1.6$으로 계산한다.)

① 3000만 원　② 3080만 원　③ 3120만 원
④ 3160만 원　⑤ 3200만 원

해설

(2억 4천만원을 10년간 은행에 예치했을 때의 원리합계)=(10년간 받는 연금의 총합)
매년말에 받는 연금을 a원이라 하면
(10년간 받는 연금의 총합)
$=a(1+r)^9 + a(1+r)^8 + \cdots + a$

$$\frac{a\left\{(1+r)^{10}-1\right\}}{(1+r)-1} = 2.4\text{억}\times(1+r)^{10}$$

$$\frac{a(1.6-1)}{0.05} = 2.4\text{억}\times 1.6$$

$$a = \frac{2.4\times1.6\times0.05}{0.6}\text{억}$$

$= 0.32$억
$= 3200$만 (원)

13. 다음 ( ) 안에 알맞은 것은?

$1-2i,\ 2-4i,\ 3-8i,\ 4-16i, (\quad), \cdots$

① $5-18i$　② $5-20i$　③ $5-24i$
④ $5-32i$　⑤ $5-64i$

해설

주어진 복소수의 배열을
$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ a_3+b_3i,\ a_4+b_4i, \cdots$ 와 같이 생각한다면
(단, $a_k,\ b_k$는 실수)
수열 $\{a_n\}$의 배열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (\quad),\ \cdots$ 이고
수열 $\{b_n\}$의 배열은 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ (\quad),\ \cdots$ 이다.
따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5-32i$이다.

14. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$$

① $(-1)^{n+1} \times n$　② $n-(-1)^n$　③ $(-1)^n + n$
④ $(-1)^n \times n$　⑤ $\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$

해설

$a_1 = -1 \cdot 1$
$a_2 = (-1)^2 \cdot 2$
$a_3 = (-1)^3 \cdot 3$
$a_4 = (-1)^4 \cdot 4$이므로
$a_n = (-1)^n \cdot n$