

1. 수열 $\log 3, \log 9, \log 27, \dots$ 의 제 101 항은?

① $10 \log 3$

② $99 \log 3$

③ $100 \log 3$

④ $101 \log 3$

⑤ $102 \log 3$

해설

$$a_1 = \log 3$$

$$a_2 = \log 9 = 2 \log 3$$

$$a_3 = \log 27 = 3 \log 3$$

$$\vdots$$

$$a_n = n \log 3$$

$$\therefore a_{101} = 101 \log 3$$

2. 첫째항이 1, 공비가 8인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = \log_2 a_n$ 으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 135

해설

$$a_n = 8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3}$$

$$b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{3n-3}$$

b_n 은 첫째항이 0, 공차가 3인 등차수열

$$\begin{aligned}\therefore S_{10} &= \frac{10 \{2 \cdot 0 + (10 - 1) \cdot 3\}}{2} \\ &= 5 \cdot 27 = 135\end{aligned}$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} \text{ 이므로 } a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$$

4. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

5. 수열 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7, \dots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라.
($\omega^3 = 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω , 공비가 ω^2 , 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega \{(\omega^2)^{36} - 1\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

6. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b$, a , $a+b$ 라 하면 세 수의 합이 12이므로

$$(a-b) + a + (a+b) = 12, 3a = 12$$

$$\therefore a = 4$$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = 28, 16 - d^2 = 7$$

$$d^2 = 9 \therefore d = \pm 3$$

따라서 구하는 세 수는 1, 4, 7이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

7. 두 수 $\frac{1}{7}$ 과 $\frac{1}{3}$ 의 사이에 세 개의 수 x, y, z 를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x + y + z)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 조화수열을 이루려면 $7, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, 3$ 이 등차수

열을 이루어야 하므로

$$\frac{1}{x} = 6, \frac{1}{y} = 5, \frac{1}{z} = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{5}, z = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 60(x + y + z) = 60 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 60 \cdot \frac{37}{60} = 37$$

8. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = -n^2 + 2n$ 일 때,
 $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -280

해설

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) \\ &= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10) \\ &= -360 - (-80) = -280 \end{aligned}$$

9. $A = 2^{2014}$, $B = 3^{2014}$ 이라 할 때, 6^{2014} 의 양의 약수의 총합을 A 와 B 로 나타내면?

① $\frac{1}{2}(2A - 1)(3B - 1)$

② $\frac{1}{3}(2A - 1)(3B - 1)$

③ $(2A - 1)(3B - 1)$

④ $(2A + 1)(3B + 1)$

⑤ $\frac{1}{2}(2A + 1)(3B + 1)$

해설

$6^{2014} = 2^{2014} \times 3^{2014}$ 이므로 6^{2014} 의 양의 약수의 총합은 $(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2014})(3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{2014})$

$$= \frac{2^{2015} - 1}{2 - 1} \times \frac{3^{2015} - 1}{3 - 1}$$

$$= (2^{2015} - 1) \cdot \frac{3^{2015} - 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2A - 1)(3B - 1)$$

10. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ 일 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

㉠ $a_3 = 36$

㉡ $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$ 은 등차수열이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 4 \text{ 이므로}$$

$$a_n = (2 \cdot 3^n - 2) - (2 \cdot 3^{n-1} - 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$$

㉠ $a_3 = 36$

㉡ $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.

㉢ $\{\log_{10} a_n\}$ 은 첫째항이 $\log_{10} 4$, 공차가 $\log_{10} 3$ 인 등차수열이다.

11. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① 2250

② 2500

③ 2750

④ 3000

⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l - 1$ (단, $l \geq 0$ 인 정수)의 꼴이고,

6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m - 1$ (단, $m \geq 0$ 인 정수)의 꼴이다.

따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x 라고 하면

$$x = 4l - 1 = 6m - 1 \text{ 을 만족해야 하므로 } x + 1 = 4l = 6m$$

즉, $x + 1 = 12n$, 즉, $x = 12n - 1$ ($n \geq 1$ 인 정수)

따라서 조건을 만족하는 수열은 11, 23, 35, ...로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20항까지의 합은

$$\frac{20(2 \cdot 11 + 19 \cdot 12)}{2} = 2500$$

12. 30년간 자동차회사에 근무하던 사람이 명예퇴직을 하면서 퇴직금으로 2억 4천만 원을 받을 예정인데 이 돈을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액씩 연금 형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 연이율 5%의 복리로 10년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은 얼마인가? (단, $1.05^{10} = 1.6$ 으로 계산한다.)

- ① 3000만 원 ② 3080만 원 ③ 3120만 원
 ④ 3160만 원 ⑤ 3200만 원

해설

(2억 4천만원을 10년간 은행에 예치했을 때의 원리합계)=(10년간 받는 연금의 총합)

매년말에 받는 연금을 a 원이라 하면

(10년간 받는 연금의 총합)

$$= a(1+r)^9 + a(1+r)^8 + \cdots + a$$

$$\frac{a\{(1+r)^{10} - 1\}}{(1+r) - 1} = 2.4\text{억} \times (1+r)^{10}$$

$$\frac{a(1.6 - 1)}{0.05} = 2.4\text{억} \times 1.6$$

$$a = \frac{2.4 \times 1.6 \times 0.05}{0.6} \text{억}$$

$$= 0.32 \text{억}$$

$$= 3200 \text{만 (원)}$$

13. 다음 ()안에 알맞은 것은?

$$1 - 2i, 2 - 4i, 3 - 8i, 4 - 16i, (\quad), \dots$$

① $5 - 18i$

② $5 - 20i$

③ $5 - 24i$

④ $5 - 32i$

⑤ $5 - 64i$

해설

주어진 복소수의 배열을

$a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, a_3 + b_3i, a_4 + b_4i, \dots$ 와 같이 생각한다면
(단, a_k, b_k 는 실수)

수열 $\{a_n\}$ 의 배열은 1, 2, 3, 4, (), $\dots$ 이고

수열 $\{b_n\}$ 의 배열은 -2, -4, -8, -16, (), $\dots$ 이다.

따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5 - 32i$ 이다.

14. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

$$-1, 2, -3, 4, \dots$$

① $(-1)^{n+1} \times n$

② $n - (-1)^n$

③ $(-1)^n + n$

④ $(-1)^n \times n$

⑤ $\frac{1}{2} \{1 - (-1)^n\}$

해설

$$a_1 = -1 \cdot 1$$

$$a_2 = (-1)^2 \cdot 2$$

$$a_3 = (-1)^3 \cdot 3$$

$$a_4 = (-1)^4 \cdot 4 \text{이므로}$$

$$a_n = (-1)^n \cdot n$$