1. 다음 (　　) 안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1},\ \frac{\sqrt{5}}{4},\ \frac{\sqrt{7}}{9},\ (\quad),\ \frac{\sqrt{11}}{25}$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$　② $\frac{\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$　⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$의 규칙으로 나타난다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3$이다.
분모는 $+1$이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2=16$이므로 (　) 안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_6 = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $a_6 + a_7 = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$(복호동순), $a_5 + a_7 = 2a_6$ 이므로

$(a_5 + a_6) + (a_6 + a_7) = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)$ 에서

$4a_6 = 2\sqrt{3} \quad \therefore\ a_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 첫째항이 -25, 공차가 3인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항 ② 제 10항 ③ 제 11항

④ 제 12항 ⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$3n - 28 > 0,\ 3n > 28$

$\therefore\ n > \dfrac{28}{3} = 9.33\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

4. 세 수 $a,\ a+2,\ 2a+1$이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a의 값은? (단, $a>0$)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

세 수 $a,\ a+2,\ 2a+1$이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$(a+2)^2 = a(2a+1)$

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4(\because a>0)$

5. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$2\log a = \log 2 + \log 8$

$a^2 = 16, \quad \therefore \ a = 4$

$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore \ b = 8$

$a + b = 4 + 8 = 12$

6. 어떤 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이 145, 제 11항부터 제 20항까지의 합이 445이다. 이 등차수열의 제 21항부터 제 30항까지의 합은?

① 645 ② 680 ③ 715 ④ 745 ⑤ 780

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 145 \quad \therefore \ 2a+9d = 29 \cdots ㉠$$

$$S_{20} = \frac{20(2a+19d)}{2} = 145+445 = 590$$

$$\therefore \ 2a+19d = 59 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d=3, \ a=1$

따라서 제 21항부터 제 30항까지의 합은

$$S_{30} - S_{20} = \frac{30(2\cdot 1+29\cdot 3)}{2} - 590 = 745$$

7. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 2n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 + a_4 + a_6$ 의 값은?

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

해설

$S_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$S_{n-1} = (n-1+1)^2 = n^2$

$a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \ (n \geq 2)$

$a_2 + a_4 + a_6 = 5 + 9 + 13 = 27$

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 1$일 때, $a_1 + a_4$의 값은?

① 111 ② 112 ③ 113 ④ 114 ⑤ 115

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ ······㉠

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 1 - (2 \cdot 3^{n-1} - 1) = 4 \cdot 3^{n-1}$ ······㉡

그런데 ㉡에 $n = 1$을 대입하면 ㉠과 다르므로 이 수열은 제2항부터 등비수열을 이룬다.

$\therefore a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ $(n \geq 2)$, $a_1 = 5$

$\therefore a_1 + a_4 = 5 + 4 \cdot 3^3 = 113$

9. 세 수 a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루고 $a+b+c=3,\ abc=-3$을 만족할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

공차를 d라 하면

$a=b-d,\ c=b+d$

$a+b+c=3b=3\ \therefore b=1$

$abc=(1-d)(1+d)=-3$

$1-d^2=-3$

$d^2=4$

$\therefore d=\pm 2$

(i) $d=2$일 때,

$(a, b, c)=(-1, 1, 3)$

$a^2+b^2+c^2=1+1+9=11$

(ii) $d=-2$일 때,

$(a, b, c)=(3, 1, -1)$

$a^2+b^2+c^2=9+1+1=11$

$\therefore a^2+b^2+c^2=11$

10. 제 3항이 12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$ ② $(-3) \cdot 2^{n-1}$ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$ ⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = -8$

$\therefore r = -2$

$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

11. 다음 등비수열의 일반항 a_n은?

$16, \quad -8, \; 4, \quad -2, \cdots\cdots$

① $8(-2)^n$　② $16(-2)^{n-1}$　③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16이고 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

12. 첫째항이 37, 공차가 -5 인 등차수열이 있다. 첫째항부터 제20항까지 각 항의 절댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 522

해설

주어진 수열의 제 n항이 음수가 된다고 하면

$a_n = 37 + (n-1)\cdot(-5) < 0$

$-5n + 42 < 0,\ n > \dfrac{42}{5} = 8.4$

$\therefore\ n = 9,\ 10,\ 11, \cdots$

따라서 주어진 수열은 제9항부터 음수가 되고, 이때

$a_8 = -5\cdot 8 + 42 = 2$

$a_9 = -5\cdot 9 + 42 = -3$

$a_{20} = -5\cdot 20 + 42 = -58$

이므로 구하는 합은

$(37 + 32 + 27 + \cdots + 2) + (|-3| + |-8| + |-13| + \cdots + |-58|)$

$= \dfrac{8(37+2)}{2} + \dfrac{12(3+58)}{2} = 156 + 366 = 522$

13. $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 곱을 $P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$이라 하자. P_n의 값이 최대일 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a_n > 0$이고, $a_n \neq 1$이므로

$a_{n+1} > 1$이면 $P_n \times a_{n+1} > p_n$,

즉, $p_{n+1} > p_n$

$a_{n+1} < 1$이면 $P_n \times a_{n+1} < P_n$, 즉, $P_{n+1} < P_n$

따라서, $a_n > 1$인 마지막 항까지의 곱이 P_n의 최댓값이다.

$a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1,\ 2^{n-1} < 3000$

$2^{11} = 2048$이므로 $n - 1 = 11 \quad \therefore\ n = 12$

14. 사업가 K 씨는 2014 년 1 월 1 일에 S 대학에 장학금으로 사용해 달라고 1 억원을 기탁하였다. S 대학에서는 기탁금의 원리금과 이자로 2015 년 1 월 1 일부터 매년 11 명에게 일정금액씩을 장학금으로 지급하려고 한다. 장학금은 매년 전년도에 비해 10% 증액되며, 기탁금은 연이율 10% 의 복리로 적립된다. 20 년 동안 기탁금이 모두 장학금으로 지급되도록 하려면 2015 년에 1 인당 얼마씩의 장학금이 지급되어야 하는지 구하여라.

▶ 답 :

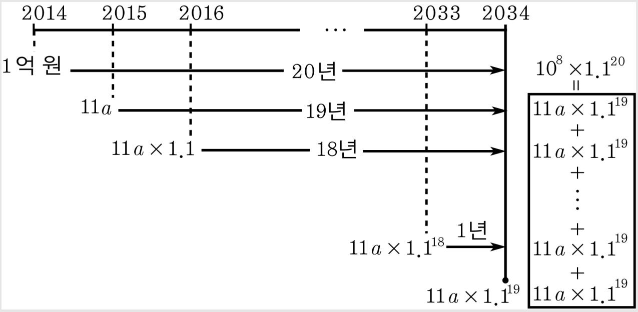
▷ 정답 : 50 만원

해설

2014 년 1 월 1 일부터 20 년 후의 1 월 1 일에 장학금을 지급하면 기탁금이 모두 없어진다고 하므로 1 억원에 대한 20 년 후의 가치는 $10^8 \times 1.1^{20}$(원)
2015 년 1 월 1 일에 1 인당 지급되는 장학금을 a 원이라고 하면 2015 년에 지급되는 장학금 총액에 대한 19 년 후의 가치는 $11a \times 1.1^{19}$(원)
2016 년 1 월 1 일에 지급되는 장학금은 10% 증액되어 $a \times 1.1$(원)이며 2016 년에 지급되는 장학금의 총액에 대한 18 년 후의 가치는 $1.1 \times a \times 1.1 \times 1.1^{18} = 11a \times 1.1^{19}$(원)
2017 년 1 월 1 일에 1 인당 지급되는 장학금은 다시 10% 증액되어 $a \times 1.1^2$(원) 이며 2017 년에 지급되는 장학금 총액에 대한 17 년 후의 가치는
$11 \times a \times 1.1^2 \times 1.1^{17} = 11a \times 1.1^{19}$ (원이다.)

$\vdots$

2034 년 1 월 1 일에 1 인당 지급되는 장학금은 $a \times 1.1^{19}$(원) 이므로 2034 년에 지급되는 장학금 총액은 $11a \times 1.1^{19}$(원) 이다.



따라서, $20 \times 11a \times 1.1^{19} = 10^8 \times 1.1^{20}$ 에서

$$a = \frac{10^8 \times 1.1^{20}}{20 \times 11 \times 1.1^{19}} = 5 \times 10^5 \text{(원)}$$

즉, 2015 년에 1 인당 50 만원씩 지급되어야 한다.