

1. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$

$\therefore a=-1$, $b=-2$

$\therefore a+b=-1-2=-3$

2. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}}{}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여
분다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

3. 곡선 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 곡선 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선은 $x = a$, $y = b$ 이다. $m + n + a + b$ 의 값은?

① 6 ② 1 ③ 2 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$y = \frac{6}{x} \text{ 의 그래프를}$$

x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{따라서 } m = 3, n = 1$$

$$\text{또, } y = \frac{3x-1}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 3 \text{ 에서}$$

$$\text{점근선은 } x = -1, y = 3 \quad a = -1, b = 3$$

따라서 구하는 합은 6

4. 함수 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-1} \text{ 에서 } y(x-1) = ax+1$$

$$yx - y = ax + 1, yx - ax = 1 + y$$

$$x(y-a) = 1+y, x = \frac{1+y}{y-a}$$

$$\therefore y^{-1} = \frac{x+1}{x-a}$$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$$\frac{x+1}{x-a} = \frac{ax+1}{x-1}$$

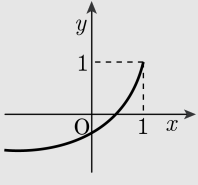
$$\therefore a = 1$$

5. 다음중 함수 $y = -\sqrt{-2x+2}+1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

- ① 제 1 사분면
- ② 제 2 사분면
- ③ 제 3 사분면
- ④ 제 4 사분면
- ⑤ 제 3, 4 사분면

해설

$y = -\sqrt{-2(x-1)}+1$ 의 그래프는
 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 원점에 대하여
대칭이동한
다음 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
그림과 같다. 따라서 함수의 그래프는
제 2 사분면을 지나지 않는다.



6. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1} + \sqrt{-12x}$ 의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

- ① $\{x \mid x \geq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$ ② $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$
③ $\{x \mid x \geq 1\}, \{y \mid y \leq 0\}$ ④ $\{x \mid x \leq 1\}, \{y \mid y \geq 0\}$
⑤ $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \leq 1\}$

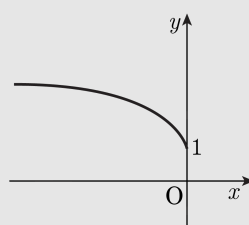
해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x+1} + \sqrt{-12x} \\ &= \sqrt{-3x+1} + 2\sqrt{(-3x) \cdot 1} \\ &= \sqrt{-3x+1} \end{aligned}$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$



7. $a, -6, b, -12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

b 는 -6 과 -12 의 등차중항이므로

$$b = \frac{-6 + (-12)}{2} = -9$$

따라서 이 수열은 공차가 -3 인 등차수열이다.

$$a + (-3) = -6 \text{에서 } a = -3$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$$

8. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

16, - 8, 4, - 2, ……

- ① $8(-2)^n$
- ② $16(-2)^{n-1}$
- ③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
- ④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- ⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

9. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a + b + c + d$ 의 값은?(단, a, b, c, d 는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$$a + b + c + d = 9 + 6 + 4 + 36 = 55$$

10. 양수 a, b 에 대하여 세 수 $\log 2, \log a, \log 8$ 이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, b, 16$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$2 \log a = \log 2 + \log 8$$

$$a^2 = 16, \quad \therefore a = 4$$

$$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore b = 8$$

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

11. $\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} = \frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5} &= \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} \\ &= \frac{2(a+b) + 3(2b+c) - 4c}{2 \times 5 + 3 \times 4 + (-4) \times 3} \\ &= \frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$$\therefore x = 10$$

12. $\sqrt{11 - \sqrt{72}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $\sqrt{(b-a)^2}$ 의 값은?
- ① 1 ② $1 - \sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2} - 1$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $-\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{11 - \sqrt{72}} &= \sqrt{11 - 2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9} - \sqrt{2})^2} = 3 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} &= 1. \times \times \times \times \\ \text{정수 부분 } a : 1 \quad &\text{소수부분 } b : 2 - \sqrt{2} \\ \therefore \sqrt{(b-a)^2} &= \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{2} - 1 \quad (1 - \sqrt{2} < 0)\end{aligned}$$

13. 다음 중 평행이동에 의하여 그 그래프를 $y = \frac{1}{x}$ 과 겹칠 수 없는 것은?

- ① $y = \frac{-x}{x+1}$ ② $y = \frac{x}{x-1}$ ③ $y = \frac{2x+1}{2x-1}$
④ $y = \frac{x-1}{x}$ ⑤ $y = \frac{2x-5}{x-3}$

해설

$$\textcircled{1} \ y = \frac{-(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1$$

$$\textcircled{2} \ y = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$$

$$\textcircled{3} \ y = \frac{(2x-1)+2}{2x-1} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + 1$$

$$\textcircled{4} \ y = \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x} + 1$$

$$\textcircled{5} \ y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 2$$

따라서 $y = \frac{1}{x-p} + q$ 의 꼴이 아닌 것은 ④이다.

14. 함수 $f(x) = \frac{ax}{2x+3}$ 는 그 정의역과 치역이 같다고 한다. a 의 값은?
(단, $x \neq -\frac{3}{2}$)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$y = \frac{ax}{2x+3} = \frac{a}{2} + \frac{-\frac{3}{2}a}{2x+3} \text{ 이므로 치역은}$$

$$y \neq \frac{a}{2} \text{ 인 실수이다.}$$

$$\therefore \frac{a}{2} = -\frac{3}{2}, \text{ 곧 } a = -3$$

15. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나고 두 직선 $x = -1, y = 3$ 을 점근선으로 가질 때 $a+b+c$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x = -1, y = 3$ 이 점근선 이므로

$$y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{k}{x+1} + 3$$

점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $k = -1$

$$\therefore y = \frac{-1}{x+1} + 3 = \frac{-1+3x+3}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$$

이 함수가 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 와 일치해야 하므로

$$a = 1, b = 3, c = 2$$

$$\therefore a+b+c = 6$$

16. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

1, 4, 9, 16...

- ① n
- ② $3n - 2$
- ③ $2n + 1$
- ④ n^2
- ⑤ $(n + 1)^2$

해설

$a_1 = 1, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 9 = 3^2, a_4 = 16 = 4^2, \cdots$
 $\therefore a_n = n^2$

17. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$$a = 35 \div 9 \text{ } \therefore \text{ } d = -9$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$= \frac{10(70 - 81)}{2}$$

$$= \frac{-110}{2} = -55$$

18. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100 이고, 11 항부터 20 항까지의 합이 300 일 때 21 항부터 30 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a + 19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a + 19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2, a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a + 29d)}{2} - (100 + 300) \\ &= \frac{30(2 + 29 \times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

19. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 각각 $n^2 + kn$, $2n^2 - 2n + 1$ 일 때, $a_{10} = b_{10}$ 을 만족하는 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$a_{10} = (10^2 + 10k) - (9^2 + 9k) = 19 + k$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= (2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 + 1) - (2 \cdot 9^2 - 2 \cdot 9 + 1) \\ &= 181 - 145 = 36 \end{aligned}$$

$$a_{10} = b_{10} \text{ 에서 } 19 + k = 36$$

$$\therefore k = 17$$

20. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = 8n^2 + 10n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_9 + a_{10}) \\ &= \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= 8 \times 5^2 + 10 \times 5 = 250\end{aligned}$$

21. $2x = t + \sqrt{t^2 - 1}$ 이고 $3y = t - \sqrt{t^2 - 1}$ 일 때, $x = 3$ 이면 y 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{9}$

③ $\frac{1}{18}$

④ $\frac{1}{36}$

⑤ $\frac{1}{72}$

해설

두 식을 곱하면

$$6xy = (t + \sqrt{t^2 - 1})(t - \sqrt{t^2 - 1}) = t^2 - (t^2 - 1)$$

$$6xy = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{6x}$$

$$x = 3 \text{ 이므로 } y = \frac{1}{18}$$

22. $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 일 때 $\frac{x^3 + x^2 - 3x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x + 9}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ 에서}$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{분자 : } x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x - 1) + 5 = 5$$

$$\text{분모 : } x^4 + 2x^3 + 2x + 9$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 10 = 10$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

23. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1} + 1$, $x = \sqrt{y+1} + 1$ 의 교점을 P라고 할 때, 선분 OP의 길이를 구하면? (단, O는 원점)

- ① $3\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $9\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

해설

두 함수가 서로 역함수 관계이므로 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{x+1} + 1 = x \text{에서}$$

$$x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x = 0, 3$$

$$x \geq 1 \text{이므로 } x = 3$$

$$\therefore P(3, 3)$$

$$OP = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

24. 그림과 같이 자연수 k 에 대하여 $\lfloor \log_{k+1} x \rfloor = 1$ 을 만족시키는 자연수 x 를 k 행에 차례로 배열할 때, k 행에 배열된 자연수의 개수를 a_k 라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하여라. (단, $\lfloor x \rfloor$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

1행				2	3				
2행		3	4	5	6	7	8		
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
10행	11	12	13	...					

▶ 답 :

▷ 정답 : 440

해설

$$1 \leq \log_{k+1} x < 2$$

$$k+1 \leq x < (k+1)^2 \text{ 이므로}$$

$$k \text{ 행에 배열된 자연수는 } k+1, k+2, \dots, k^2+2k \text{ 이므로}$$

$$\text{자연수의 개수 } a_k \text{ 는 } a_k = (k^2+2k) - k = k^2 + k \text{ 이다.}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 = 440$$

25. n 이 자연수일 때, $n + (n - 1)2 + (n - 2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$ 의 값은?

- ① 2^{n+1}
- ② $2^{n+1} - n$
- ③ $2^{n+1} - n - 2$
- ④ $2^n + n2$
- ⑤ $2^n n + 2$

해설

주어진 식의 값을 S 라 하면
 $S = n + (n - 1)2 + (n - 2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}$
역급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{r} 2S = \phantom{n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}} n \cdot 2 \phantom{+ (n-1)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}} + 2^n \\ -) S = n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\ \hline S = -n + \phantom{n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}} 2 + \phantom{n + (n-1)2 + (n-2)2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}} 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n \end{array}$$

$$\therefore S = -n + \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - n - 2$$