1. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6　② -3　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

$\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1,\ -2(a+b)=6$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-1-2=-3$

2. 다음 식을 간단히 하면 $\dfrac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$$

$$=\frac{5}{x(x+10)}$$

$a=5,\ b=10$이므로 $a+b=15$

3. 곡선 $y=\dfrac{x+3}{x-3}$ 은 곡선 $y=\dfrac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선은 $x=a$, $y=b$ 이다. $m+n+a+b$ 의 값은?

① 6　② 1　③ 2　④ -2　⑤ -3

해설

$y=\dfrac{x+3}{x-3}=1+\dfrac{6}{x-3}$

$y=\dfrac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 3만큼 , y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3,\ n=1$

또, $y=\dfrac{3x-1}{x+1}=-\dfrac{4}{x+1}+3$ 에서

점근선은 $x=-1,\ y=3$　$a=-1,\ b=3$

따라서 구하는 합은 6

4. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{x-1}$의 역함수가 그 자신이 되도록 a의 값을 정하면?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ 0

해설

$y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 에서 $y(x-1)=ax+1$

$yx-y=ax+1,\ yx-ax=1+y$

$x(y-a)=1+y,\ x=\dfrac{1+y}{y-a}$

$\therefore\ y^{-1}=\dfrac{x+1}{x-a}$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$\dfrac{x+1}{x-a}=\dfrac{ax+1}{x-1}$

$\therefore a=1$

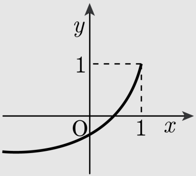
5. 다음중 함수 $y=-\sqrt{-2x+2}+1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제 1 사분면　② 제 2 사분면　③ 제 3 사분면

④ 제 4 사분면　⑤ 제 3, 4 사분면

해설

$y=-\sqrt{-2(x-1)}+1$ 의 그래프는
$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한
다음 x축의 방향으로 1 만큼,
y축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
그림과 같다. 따라서 함수의 그래프는
제 2 사분면을 지나지 않는다.



6. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}}$ 의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

② $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

③ $\{x \mid x \geq 1\}, \{y \mid y \leq 0\}$

④ $\{x \mid x \leq 1\}, \{y \mid y \geq 0\}$

⑤ $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \leq 1\}$

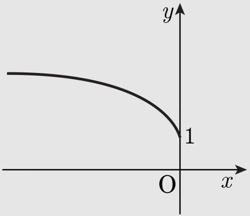
해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}} \\ &= \sqrt{-3x+1+2\sqrt{(-3x)\cdot 1}} \\ &= \sqrt{-3x}+1 \end{aligned}$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$



7. $a,\ -6,\ b,\ -12$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

b는 -6과 -12의 등차중항이므로

$$b = \frac{-6+(-12)}{2} = -9$$

따라서 이 수열은 공차가 -3인 등차수열이다.

$a+(-3) = -6$에서 $a = -3$

$$\therefore\ \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$$

8. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

$16,\quad -8,\ 4,\quad -2,\cdots\cdots$

① $8(-2)^n$　② $16(-2)^{n-1}$　③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16 이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

9. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$a+b+c+d=9+6+4+36=55$

10. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

$2\log a = \log 2 + \log 8$

$a^2 = 16, \quad \therefore\ a = 4$

$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore\ b = 8$

$a + b = 4 + 8 = 12$

11. $\frac{a+b}{5}=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}=\frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=10$

해설

$$\frac{a+b}{5}=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}$$
$$=\frac{2(a+b)+3(2b+c)-4c}{2\times5+3\times4+(-4)\times3}$$
$$=\frac{2a+8b-c}{10}$$

$\therefore x=10$

12. $\sqrt{11-\sqrt{72}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $\sqrt{(b-a)^2}$의 값은?

① 1　　② $1-\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{2}-1$

④ $\sqrt{2}$　　⑤ $-\sqrt{2}$

해설

$$\sqrt{11-\sqrt{72}} = \sqrt{11-2\sqrt{18}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2}$$

$3-\sqrt{2} = 1.\times\times\times\times$

정수 부분 a : 1　소수부분 b : $2-\sqrt{2}$

$$\therefore \sqrt{(b-a)^2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{2}-1 \quad (1-\sqrt{2}<0)$$

13. 다음 중 평행이동에 의하여 그 그래프를 $y=\frac{1}{x}$과 겹칠 수 없는 것은?

① $y=\frac{-x}{x+1}$ ② $y=\frac{x}{x-1}$ ③ $y=\frac{2x+1}{2x-1}$

④ $y=\frac{x-1}{x}$ ⑤ $y=\frac{2x-5}{x-3}$

해설

① $y=\frac{-(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-1$

② $y=\frac{(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$

③ $y=\frac{(2x-1)+2}{2x-1}=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+1$

④ $y=\frac{x-1}{x}=-\frac{1}{x}+1$

⑤ $y=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2(x-3)+1}{x-3}=\frac{1}{x-3}+2$

따라서 $y=\frac{1}{x-p}+q$의 꼴이 아닌 것은 ④이다.

14. 함수 $f(x) = \dfrac{ax}{2x+3}$ 는 그 정의역과 치역이 같다고 한다. a의 값은? (단, $x \neq -\dfrac{3}{2}$)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = \dfrac{ax}{2x+3} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{-\frac{3}{2}a}{2x+3}$ 이므로 치역은

$y \neq \dfrac{a}{2}$ 인 실수이다.

$\therefore \dfrac{a}{2} = -\dfrac{3}{2}$, 곧 $a = -3$

15. 유리함수 $y = \dfrac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프가 점 $(0,2)$ 를 지나고 두 직선 $x = -1$, $y = 3$ 을 점근선으로 가질 때 $a+b+c$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$x = -1, y = 3$ 이 점근선 이므로

$$y = \frac{bx+c}{x+a} = \frac{k}{x+1} + 3$$

점 $(0,2)$ 를 지나므로 $k = -1$

$$\therefore y = \frac{-1}{x+1} + 3 = \frac{-1+3x+3}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$$

이 함수가 $y = \dfrac{bx+c}{x+a}$ 와 일치해야 하므로

$a = 1,\ b = 3,\ c = 2$

$\therefore a+b+c = 6$

16. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$1, 4, 9, 16 \cdots$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

17. 첫째항이 35 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$ 이므로 $d = -9$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2}$$
$$= \frac{10(70-81)}{2}$$
$$= \frac{-110}{2} = -55$$

18. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a+19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2,\ a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15\times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

19. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 각각 n^2+kn, $2n^2-2n+1$일 때, $a_{10}=b_{10}$을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$a_{10}=(10^2+10k)-(9^2+9k)=19+k$

$$\begin{aligned} b_{10} &= (2\cdot 10^2-2\cdot 10+1)-(2\cdot 9^2-2\cdot 9+1) \\ &= 181-145=36 \end{aligned}$$

$a_{10}=b_{10}$에서 $19+k=36$

$\therefore\ k=17$

20. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=8n^2+10n$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdot+a_{10}$
$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10})$
$=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})$
$=8\times5^2+10\times5=250$

21. $2x = t + \sqrt{t^2 - 1}$이고 $3y = t - \sqrt{t^2 - 1}$일 때, $x = 3$이면 y의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{36}$ ⑤ $\frac{1}{72}$

해설

두 식을 곱하면

$6xy = (t + \sqrt{t^2 - 1})(t - \sqrt{t^2 - 1}) = t^2 - (t^2 - 1)$

$6xy = 1 \quad \therefore \ y = \frac{1}{6x}$

$x = 3$이므로 $y = \frac{1}{18}$

22. $x=\sqrt{3-\sqrt{8}}$일 때 $\dfrac{x^3+x^2-3x+6}{x^4+2x^3+2x+9}$의 값은?

① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$

해설

$x=\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ 에서

$x+1=\sqrt{2}\ \rightarrow\ x^2+2x-1=0$

분자 : x^3+x^2-3x+6

$=(x^2+2x-1)(x-1)+5=5$

분모 : x^4+2x^3+2x+9

$=(x^2+2x-1)(x^2+1)+10=10$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

23. 두 곡선 $y=\sqrt{x+1}+1$, $x=\sqrt{y+1}+1$의 교점을 P라고 할 때, 선분 OP의 길이를 구하면? (단, O는 원점)

① $3\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $9\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

해설

두 함수가 서로 역함수 관계이므로 곡선의 교점은
$y=\sqrt{x+1}+1$와 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+1}+1=x$에서

$x+1=(x-1)^2$

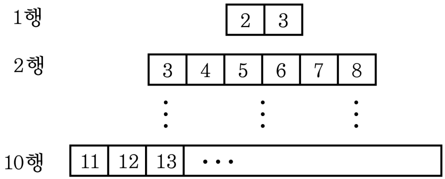
$x=0,\ 3$

$x\geq 1$이므로 $x=3$

$\therefore \mathrm{P}(3,3)$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

24. 그림과 같이 자연수 k에 대하여 $[\log_{k+1} x] = 1$을 만족시키는 자연수 x를 k행에 차례로 배열할 때, k행에 배열된 자연수의 개수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 440

해설

$1 \leq \log_{k+1} x < 2$

$k+1 \leq x < (k+1)^2$이므로

k행에 배열된 자연수는 $k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k^2+2k$이므로

자연수의 개수 a_k는 $a_k = (k^2+2k) - k = k^2 + k$이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} = \sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$

$= \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 = 440$

25. n이 자연수일 때, $n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$의 값은?

① 2^{n+1}　② $2^{n+1}-n$　③ $2^{n+1}-n-2$

④ 2^n+n2　⑤ $2^n n+2$

해설

주어진 식의 값을 S라 하면

$S=n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$

멱급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & 2S= & n\cdot 2+(n-1)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}+2^n \\ -) & S= & n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2^{n-1} \\ \hline & S= & -n+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n \end{array}$$

$$\therefore S=-n+\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-n-2$$