

1. $1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{2x+1}{x}$

② $\frac{2x-1}{x}$

③ $\frac{x-1}{x}$

④ $\frac{x+1}{x}$

⑤ $\frac{1}{x}$

해설

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} &= 1 + \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = 1 + \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} \\ &= 1 - \frac{1-x}{x} = \frac{x-1+x}{x} \\ &= \frac{2x-1}{x} \end{aligned}$$

2. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나눈다.

$$x + \frac{1}{x} - 5 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2} - |b|$ 를 간단히 하면?

① $-2a$

② $-a$

③ $a - 2b$

④ a

⑤ 0

해설

$$a \geq 0, b < 0$$

$$|a - b| - |b| = (a - b) + b = a$$

4. 유리수 a, b 에 대하여 $(1 + 2\sqrt{2})a + (-1 + \sqrt{2})b = 5 + 7\sqrt{2}$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -3

해설

$$(1 + 2\sqrt{2})a + (-1 + \sqrt{2})b = 5 + 7\sqrt{2}$$

$$(a - b) + (2a + b)\sqrt{2} = 5 + 7\sqrt{2} \cdots \textcircled{7}$$

a, b 가 유리수이면

$a - b, 2a + b$ 도 유리수이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$\begin{cases} a - b = 5 \\ 2a + b = 7 \end{cases}$$

이것을 연립하여 풀면 $a = 4, b = -1$

$$\therefore a + b = 3$$

5. 유리함수 $f(x) = \frac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3

② 2

③ 1

④ -1

⑤ -2

해설

역함수의 식은 $x = \frac{ay}{3y+2}$

$$3xy + 2x = ay$$

$$\therefore y = \frac{-2x}{3x-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-2x}{3x-a}$$

모든 실수 x 에 대하여

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이므로

$$\frac{ax}{3x+2} = \frac{-2x}{3x-a}$$

$$\therefore a = -2$$

6. 조화수열 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ 의 일반항은?

① $2n - 1$

② $2n + 1$

③ $\frac{3}{n}$

④ $\frac{6}{n}$

⑤ $\frac{1}{2n + 1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 은 등차수열이다.

$$\left\{ \frac{1}{a_n} \right\} = 3, 5, 7, 9, \dots$$

등차수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 의 일반항은 $2n + 1$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $\frac{1}{2n + 1}$

7. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$ 일 때, a_4 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 \cdot a_3 \cdot a_8$$

$$= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3 r^9$$

$$a^3 r^9 = (ar^3)^3 = 64 = 4^3$$

$$\therefore ar^3 = 4$$

$$\therefore a_4 = 4$$

8. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

9. 제 4항이 6, 제 7항이 162 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

- ① $\frac{1}{9}(3^{10} - 1)$ ② $\frac{1}{10}(3^{10} - 1)$ ③ $\frac{1}{9}(3^{10} + 1)$
④ $\frac{1}{10}(3^{10} + 1)$ ⑤ $\frac{1}{9}(3^{11} - 1)$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = 6, ar^6 = 162$$

$$r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3, a = \frac{2}{9}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{9}(3^{10} - 1)$$

10. 다음 수열에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.

1, 2, 4, 7, 11, a , b , ...

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22

∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨

1 2 3 4 5 6

$\therefore a = 16, b = 22$

$a + b = 16 + 22 = 38$

11. $x \neq 3, x \neq 5$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{3x-19}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5}$ 가 항상 성립하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2

② 3

③ 7

④ 10

⑤ 15

해설

우변을 정리하여 좌변의 계수와 비교한다.

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5} &= \frac{a(x-5) - b(x-3)}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{a(x-5) - b(x-3)}{x^2 - 8x + 15}\end{aligned}$$

$$3x - 19 = (a-b)x + (-5a+3b)$$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ 5a-3b=19 \end{cases} \Rightarrow a=5, b=2$$

$$\therefore a+b=7$$

12. $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $y = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ 일 때, $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}$ 의 값을 구하면?

① 3

② $3\sqrt{6}$

③ $2\sqrt{3}$

④ $5\sqrt{6}$

⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} \\&= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} \\&= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$x + y = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}, \quad xy = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= \frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{1} \\&= 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

13. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2$, $y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \cdots \textcircled{1}$$

①이 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + 1 \therefore k = 1$$

$$y = \frac{1+x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore a = 1, b = -1, c = -2$$

따라서 $abc = 2$

14. 함수 $y = \frac{ax+b}{2x+c}$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나고 점근선이 $x = 2, y = 1$ 일 때,
 $a + b + c$ 의 값은?

① -8

② -6

③ -4

④ -2

⑤ 0

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{k}{x-2} + 1$$

또 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{1-2} + 1 \therefore k = -1$$

$$\therefore y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{-1}{x-2} + 1 = \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-6}{2x-4}$$

$$\therefore a = 2, b = -6, c = -4$$

$$\therefore a + b + c = -8$$

15. $a \leq x \leq 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x} + 1$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6 이다.
이때, $m - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x} + 1 = \sqrt{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)} + 1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$6 = \sqrt{3-2a} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$$

$$\therefore a = -11$$

또한, $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$m = \sqrt{3-2 \times 1} + 1 = 2$$

$$\therefore m - a = 13$$

16. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$$

17. $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2 (x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$ 이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x-1$

$\therefore x = y^2 - 4y + 5 (y \geq 2)$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

18. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 두 점 $(2, 2)$, $(3, 6)$ 을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.



답:

개



정답: 11 개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(2, 2)$ 를 지날 때

$$2 = \sqrt{2k}, \quad 2k = 4$$

$$\therefore k = 2$$

또, 함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(3, 6)$ 을 지날 때

$$6 = \sqrt{3k}, \quad 3k = 36$$

$$\therefore k = 12$$

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$2 \leq k \leq 12 \text{ 이므로}$$

정수 k 는 2, 3, 4, $\dots$, 12 의 11 개다.

19. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, ... 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



- ① 30 개 ② 32 개 ③ 34 개 ④ 36 개 ⑤ 38 개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 9$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = n^2$$

$$\therefore a_6 = 36$$

20. 두 수 3과 7의 등차중항을 a , 10과 -2의 등차중항을 b 라 할 때, 이차 방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차는?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

3과 7의 등차중항은 $a = \frac{3+7}{2} = 5$

10과 -2의 등차중항은 $b = \frac{10+(-2)}{2} = 4$

$x^2 + ax + b = 0$ 에서

$x^2 + 5x + 4 = 0$, $(x+1)(x+4) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = -4$

따라서 두 근의 차는 3

21. A 국가의 인구는 전 세계 인구의 $c\%$ 이고, 이 국가의 재산은 전 세계 재산의 $d\%$ 이다. B 국가의 인구는 전 세계 인구의 $e\%$ 이고, 재산은 전 세계 재산의 $f\%$ 이다. A, B 두 국가의 국민이 그 나라의 재산을 평등하게 나누어 가지고 있다고 가정할 때, A 국가의 한 사람이 소유하고 있는 재산의, B 국가의 한 사람이 소유하고 있는 재산에 대한 비의 값을 구하면?

① $\frac{cd}{ef}$

② $\frac{ce}{df}$

③ $\frac{cf}{de}$

④ $\frac{de}{cf}$

⑤ $\frac{df}{ce}$

해설

전 세계의 인구와 재산을 각각 P , W 라 하면

A 국가의 인구와 재산은 각각 $\frac{Pc}{100}$, $\frac{Wd}{100}$ 이므로

$$1 \text{ 인당 재산} = \frac{\frac{Wd}{100}}{\frac{Pc}{100}} = \frac{Wd}{Pc}$$

마찬가지로, B 국가의 1 인당 재산은 $\frac{Wf}{Pe}$

따라서, 구하는 비는 $\frac{\frac{Wd}{Pc}}{\frac{Wf}{Pe}} = \frac{de}{cf}$

22. 첫째항이 31, 공차가 -2인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220인 모든 n 의 값의 합은?

① 10

② 22

③ 32

④ 44

⑤ 56

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \{ 2 \cdot 31 + (n-1) \cdot (-2) \}}{2} \\ &= n \{ 31 - (n-1) \} \\ &= n(32 - n) \\ &= -n^2 + 32n = 220 \end{aligned}$$

$\therefore n$ 의 값의 합은 32

23. 첫째항이 50이고, 공차가 -4인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

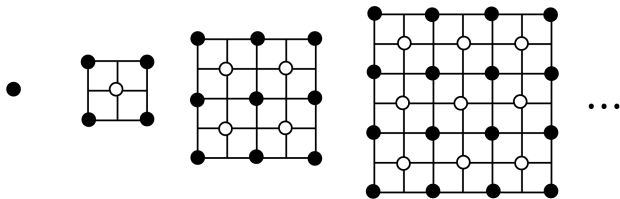
▷ 정답 : 13번째 항

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \{ 2 \cdot 50 + (n-1) \cdot (-4) \}}{2} \\ &= \frac{n(100 - 4n + 4)}{2} \\ &= \frac{n(-4n + 104)}{2} \\ &= n(-2n + 52) \\ &= -2n^2 + 52n \\ &= -2(n^2 - 26n + 13^2 - 13^2) \\ &= -2(n-13)^2 + 2 \times 13^2 \end{aligned}$$

∴ $n = 13$ 일 때 최대

24. 10개의 바둑판에 각각 흰 돌과 검은 돌을 다음과 같은 규칙으로 놓았을 때, 이 10개의 바둑판에 놓인 모든 검은 돌의 개수를 S , 흰 돌의 개수를 T 라 하자. 이때, $S - T$ 의 값은?



① 36

② 49

③ 64

④ 81

⑤ 100

해설

n 번째 바둑판에 놓인 검은 돌, 흰 돌의 개수는 각각 n^2 , $(n-1)^2$ 이므로

10개의 바둑판에 놓인 검은 돌의 개수의 합 S 는

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$$

10개의 바둑판에 놓인 흰 돌의 개수의 합 T 는

$$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2$$

$$\therefore S - T = 10^2 = 100$$

25. 수열 $\{a_n\}$ 을 $\log_3 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n(n-1) (n=1, 2, 3, \cdots)$ 로 정의할 때, $\frac{a_{21}}{a_{20}}$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

$\log_3 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n(n-1)$ 에서

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 3^{n(n-1)} \dots \textcircled{\Gamma}$$

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} = 3^{(n-1)(n-2)} \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\Gamma} \div \textcircled{\text{L}} \text{ 을 하면 } a_n = 3^{2(n-1)}$$

$$\therefore \frac{a_{21}}{a_{20}} = \frac{3^{40}}{3^{38}} = 3^2 = 9$$