

1. 등비수열 $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ 의 일반항 a_n 은?

① $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

② $\left(\frac{1}{3}\right)^n$

③ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

④ $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

⑤ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

해설

첫째항이 3이고, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

2. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4a_5a_6 = 125$ 일 때, a_5 의 값은?

① 2

② 5

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_4a_5a_6 = ar^3 \cdot ar^4 \cdot ar^5 = a^3r^{12} = (ar^4)^3 \text{ 이므로}$$

$$(ar^4)^3 = 125 = 5^3$$

$$\therefore a_5 = ar^4 = 5$$

3. $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$, $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3)^2$ 의 값은?

- ① 110 ② 120 ③ 130 ④ 140 ⑤ 150

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} 4a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} 12a_k + \sum_{k=1}^{10} 9 \\ &= 4 \times 20 - 12 \times 5 + 9 \times 10 \\ &= 80 - 60 + 90 = 110 \end{aligned}$$

4. 첫째항이 7, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 -20은 몇째 항인가?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \times (-3) \\ &= 7 + (n-1) \times (-3) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = -3n + 10$$

$$-3n + 10 = -20$$

$$-3n = -30$$

$$n = 10$$

5. 세 수 $-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 등차수열을 이루면 $5 + x$ 가 등차중항
이므로

$$2(5 + x) = -7 + 2x + 5 - 4x$$

$$4x = -12$$

$$\therefore x = -3$$

6. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

7. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

8. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

1, 4, 9, 16...

- ① n
- ② $3n - 2$
- ③ $2n + 1$
- ④ n^2
- ⑤ $(n + 1)^2$

해설

$a_1 = 1, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 9 = 3^2, a_4 = 16 = 4^2, \cdots$
 $\therefore a_n = n^2$

9. 다음 조건을 만족하는 등차수열 $\{a_n\}$ 의 개수는? (단, $n \geq 3$)

- ㉠ $a_1 = 1$

㉡ 공차는 정수이다.

㉢ $a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n = 118$

- ① 1

② 2

③ 3
- ④ 4

⑤ 무수히 많다.

해설

$$S_n = \frac{n\{2 + (n - 1)d\}}{2} = 118$$

$$n\{2 + (n - 1)d\} = 236$$

$$236 = 4 \times 59 \text{ 이고 } n \geq 3 \text{ 이므로}$$

(i) $n = 4$ 일때

$$2 + (n - 1)d = 59$$

$$2 + 3d = 59, d = 19$$

(ii) $n = 59$ 일때

$$2 + (n - 1)d = 4$$

$$2 + 58d = 4$$

d 는 정수이므로 성립하지 않는다.

$\therefore \{a_n\}$ 은 한 개

10. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_5 = -2$ 일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d 라 하면

$$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$$

이때, $a_n \geq 0$ 에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{20})$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$$

$$= 2 \cdot \frac{4(6+0)}{2} - \frac{20(6-32)}{2} \quad (\because a_4 = 0, a_{20} = -32)$$

$$= 24 + 260 = 284$$

11. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열을 이룬다. 이때, $\frac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 3n-1\end{aligned}$$

$$a_n = 2^{3n-1}$$

$\frac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

12. 첫째항부터 제3항까지의 합이 28, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 252
인 실수로 이루어진 등비수열의 제10항은?

- ① 2^7 ② 2^8 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{11}

해설

첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하고, 이 등비수열의 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 28 \dots\dots \textcircled{A}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 252 \dots\dots \textcircled{B}$$

②을 변형하면

$$\frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 252,$$

$$\frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} \cdot (r^3 + 1) = 252$$

위의 식에 ①을 대입하면

$$28(r^3 + 1) = 252, \quad r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$$

$$r \text{는 실수이므로 } r = 2 \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{C} \text{을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } 7a = 28 \quad \therefore a = 4$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 4, 공비는 2이다.

$$\therefore a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2^{11}$$

13. $a_n = 2n^2 + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \{2(n+1)^2 + (n+1)\} - (2n^2 + n) \\ &= 4n + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k + 3) \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 3 \cdot 10 \\ &= 250 \end{aligned}$$

14. 다음 수열의 합을 구하여라.

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{1}$$
$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{2}$$
이므로 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면
$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$
$$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$$

15. 수열 $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$ 에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면
1/ 1, 2/1, 2, 3/ 1, 2, 3, 4/ ...
1군은 1
2군은 1, 2
3군은 1, 2, 3이므로
7군은 1, 2, 3, ..., 7
(6까지의 항의 총수)= $1 + 2 + \dots + 6 = 21$
 $21 + 7 = 28$ (번째 항)