1. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　　② 550　　③ 1100　　④ 1150　　⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7i}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(385+385)=385$

2. 다음 수열의 합을 $\sum$기호를 써서 나타내면?

$$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$　② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$　③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$
④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$　⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로
$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

3. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}) = (3n+2)^2$을 만족할 때, $\sum_{k=31}^{60} a_k$의 값은?

① 2520 ② 2620 ③ 2720 ④ 2820 ⑤ 2920

해설

$\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$= (a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$

$= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{3n}$

$= \sum_{k=1}^{3n} a_k = (3n+2)^2$

$\sum_{k=31}^{60} a_k = \sum_{k=1}^{60} a_k - \sum_{k=1}^{30} a_k$

$= (3\cdot 20+2)^2 - (3\cdot 10+2)^2$

$= 62^2 - 32^2 = 3844 - 1024 = 2820$

4. $\sum_{k=1}^{40} \log_3 \dfrac{2k+1}{2k-1}$ 의 값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$\sum_{k=1}^{40} \log_3 \dfrac{2k+1}{2k-1}$

$= \log_3 \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{7}{5} \cdots \dfrac{81}{79} = \log_3 81 = 4$

5. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = 364$를 만족하는 n의 값은?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l^2+l)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$= 364 = 2^2 \times 7 \times 13$

$\therefore\ n(n+1)(n+2) = 6 \times 2^2 \times 7 \times 13 = 12 \times 13 \times 14$

따라서 $n = 12$

6. n개의 수 $1 \cdot 2n,\ 2 \cdot (2n-1),\ 3 \cdot (2n-2), \cdots,\ n(n+1)$ 의 합은?

① $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$　② $\dfrac{n(n+1)^2}{2}$

③ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$　④ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3}$

⑤ $n(n+1)(2n+1)$

해설

주어진 수열의 제 k항은

$k\left\{2n-(k-1)\right\} = k(2n-k+1)$

$= -k^2 + (2n+1)k$

이므로 구하는 합은

$\sum_{k=1}^{n} k\left\{2n-(k-1)\right\}$

$= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} k$

$= -\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

7. 이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(\alpha-k)(\beta-k)$의 값은?

① 215 ② 225 ③ 235 ④ 245 ⑤ 255

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-5$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(\alpha-k)(\beta-k)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-5)$

$=\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\times\dfrac{10\cdot 11}{2}-50=225$

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, $\sum_{k=1}^{5} ka_k$의 값은?

① 110 ② 125 ③ 145 ④ 160 ⑤ 180

해설

$S_n = n^2 + 2n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= 2n + 1 (n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$

$n = 1$일 때,

$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

따라서

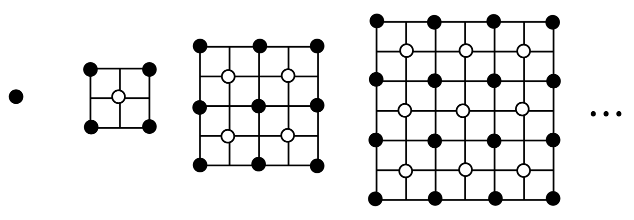
$a_n = 2n + 1 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이므로

$\sum_{k=1}^{5} ka_k = \sum_{k=1}^{5} k(2k+1)$

$= \sum_{k=1}^{5} (2k^2 + k) = 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$

$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 125$

9. 10개의 바둑판에 각각 흰 돌과 검은 돌을 다음과 같은 규칙으로 놓았을 때, 이 10개의 바둑판에 놓인 모든 검은 돌의 개수를 S, 흰 돌의 개수를 T라 하자. 이때, $S-T$의 값은?



① 36 ② 49 ③ 64 ④ 81 ⑤ 100

해설

n번째 바둑판에 놓인 검은 돌, 흰 돌의 개수는 각각 $n^2, (n-1)^2$이므로

10개의 바둑판에 놓인 검은 돌의 개수의 합 S는

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

10개의 바둑판에 놓인 흰 돌의 개수의 합 T는

$T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2$

$\therefore S - T = 10^2 = 100$

10. $\sum_{k=1}^{10}(11-k)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 55

해설

$\sum_{k=1}^{10}(11-k) = 10+9+8+\cdots+2+1$

$= \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$

11. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4$, $\sum_{i=1}^{100} y_i = 6$일 때, $\sum_{k=1}^{100}(3x_k - 2y_k)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\sum_{k=1}^{100}(3x_k - 2y_k) = 3\sum_{k=1}^{100} x_k - 2\sum_{k=1}^{100} y_k$
$= 3\sum_{i=1}^{100} x_i - 2\sum_{i=1}^{100} y_i = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$

12. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=8n^2+10n$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdot+a_{10}$
$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10})$
$=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})$
$=8\times5^2+10\times5=250$

13. 다음 등식이 성립하도록 하는 c의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100}(k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4\sum_{k=11}^{100} k + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 360

해설

$\sum_{k=11}^{100}(k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100}(k^2-4k+4)$
$= \sum_{k=11}^{100} - 4\sum_{k=11}^{100} k + \sum_{k=11}^{100} 4$
$\therefore\ c = \sum_{k=11}^{100} 4 = 4+4+\cdots+4 = 4\times 90 = 360$

14. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \left\{2(n-1)^2 - (n-1)\right\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$