

1. $4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$$\begin{aligned} 4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3 &= \sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^3 k^3 \\ &= \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 - \left(\frac{3 \cdot 4}{2} \right)^2 \\ &= 3025 - 36 = 2989 \end{aligned}$$

2. 다음 중 옳은 것은?

① $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 5) = \sum_{k=1}^n (3k - 5)$

② $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n + 1) = \sum_{k=1}^n 2(k + 1)$

③ $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k + 1)$

④ $4 + 5 + 6 + \cdots + (n + 3) = \sum_{k=1}^n (k + 3)$

⑤ $3 + 4 + 5 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k$

해설

① $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 5) = \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2)$

② $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n + 1) = \sum_{k=1}^{n+1} 2n$

③ $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1)$

⑤ $3 + 4 + 5 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n-2} (k + 2)$

3. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-\sum_{k=4}^{10}(k^2+k)$$

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$$(\text{준 식})=\sum_{k=1}^3(k^2+k)=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)=20$$

4. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{10} = 30$ 을 만족할 때 $\sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=1}^9 a_{k-1}$ 의 값은?

① 26

② 27

③ 28

④ 29

⑤ 30

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=1}^{10} a_{k-1} \\ &= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) - \\ & \quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) \\ &= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29 \end{aligned}$$

5. $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

6. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$ 의 값은?

$$a_1 = 3, a_2 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1, 2, 3)$$

- ① $\frac{2}{9}$
- ② $\frac{5}{12}$
- ③ $\frac{7}{16}$
- ④ $\frac{5}{24}$
- ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$ 은 조화수열이다. 따라서

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3, \frac{1}{a_2} = 6$ 이므로

$$\frac{1}{a_n} = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n, a_n = \frac{1}{3n}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{12} \therefore a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$$

7. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29

② 31

③ 33

④ 35

⑤ 37

해설

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
 a_n 은 초항이 4, 공차가 3 인 등차수열
 $\therefore a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
 $= 4 + 3n - 3$
 $= 3n + 1$
 $\therefore a_{10} = 31$

8. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

$$\therefore a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$$

9. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 2 : 3$ 가 성립할 때, $a_1 : a_8$ 는? (단, $a \neq 0$ 이다.)

① $1 : 2$ ② $1 : 3$ ③ $2 : 3$ ④ $2 : 5$ ⑤ $3 : 5$

해설

$$3(a_1 + a_2) = 2(a_3 + a_4)$$

$$3(a + a + d) = 2(a + 2d + a + 3d)$$

$$6a + 3d = 4a + 10d$$

$$2a = 7d$$

$$\begin{aligned} a_1 : a_8 &= a : (a + 7d) \\ &= a : 3a = 1 : 3 \end{aligned}$$

10. 등차수열을 이루는 세 수에 대하여 세 수의 합이 15이고, 제곱의 합은 91일 때, 세 수의 곱은?

① 85 ② 90 ③ 95 ④ 100 ⑤ 105

해설

세 수를 $5-d$, 5 , $5+d$ 라 할 수 있다.

$$(5-d)^2 + 5^2 + (5+d)^2 = 91$$

$$75 + 2d^2 = 91$$

$$2d^2 = 16$$

$$d = \pm 2\sqrt{2}$$

(i) $d = 2\sqrt{2}$ 일 때

$$\text{세 수 : } 5 - 2\sqrt{2}, 5, 5 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (5 - 2\sqrt{2}) \times 5 \times (5 + 2\sqrt{2})$$

$$= (25 - 8) \times 5 = 17 \times 5 = 85$$

(ii) $d = -2\sqrt{2}$ 일 때

$$\text{세 수 : } 5 + 2\sqrt{2}, 5, 5 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (5 + 2\sqrt{2}) \times 5 \times (5 - 2\sqrt{2})$$

$$= (25 - 8) \times 5 = 85$$

$$\therefore 85$$

11. $a_5 = 31$, $a_{11} = 13$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 31$$

$$a_{11} = a + 10d = 13$$

$$6d = -18$$

$$d = -3$$

$$\therefore a = 31 + 4 \cdot 3 = 43$$

$$\therefore a_n = 43 + (n - 1) \times (-3)$$

$$= -3n + 46$$

$$-3n + 46 < 0 \text{인 정수 } n \text{의 최솟값을 구하면}$$

$$46 < 3n$$

$$15.\dot{\times} < n$$

$$\therefore n = 16$$

12. 두 수 2와 12 사이에 8개의 수를 넣어서 만든 수열 $2, a_1, a_2, \dots, a_8, 12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_8$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$$\begin{aligned} & 2 + a_1 + \dots + a_8 + 12 \\ &= \frac{10(2 + 12)}{2} = 70 \\ &\therefore a_1 + \dots + a_8 = 70 - 14 = 56 \end{aligned}$$

13. $a_1 = 1$, $a_{10} = 37$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} & (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99}) \\ &= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200 \end{aligned}$$

14. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 11$, $a_{14} = -11$ 일 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 의 최댓값은?

① 56 ② 62 ③ 64 ④ 68 ⑤ 70

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = 11$ 에서

$$a + 2d = 11 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_{14} = -11 \text{에서 } a + 13d = -11 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 15$

$$\therefore a_n = 15 + (n - 1) \cdot (-2) = -2n + 17$$

이때 S_n 이 최대가 되려면 양수인 항만 모두 더하면 되므로

$$-2n + 17 > 0 \text{에서}$$

$$2n < 17 \quad \therefore n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n 의 최댓값은 S_8 이므로

$$S_8 = \frac{8 \{2 \cdot 15 + 7 \cdot (-2)\}}{2} = 64$$

15. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 2n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 + a_4 + a_6$ 의 값은?

① 25

② 26

③ 27

④ 28

⑤ 29

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n + 1 - \{(n-1)^2 + 2(n-1) + 1\} \\ &= 2n + 1 (n \geq 2) \\ a_2 + a_4 + a_6 &= 5 + 9 + 13 = 27 \end{aligned}$$

16. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5a_7 = 6$ 일 때, $a_2a_4a_6a_8a_{10}$ 의 값은?

① $\pm 6\sqrt{6}$

② $\pm 18\sqrt{6}$

③ $\pm 36\sqrt{6}$

④ $\pm 8\sqrt{6}$

⑤ ± 243

해설

수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 a_2, a_6, a_{10} 과 a_4, a_6, a_8 그리고 a_5, a_6, a_7 은 모두 등비수열을 이룬다.

따라서 a_6 은 a_2 와 a_{10} , a_4 와 a_8 , a_5 와 a_7 의 등비중항이므로

$$\begin{aligned} a_2a_4a_6a_8a_{10} &= (a_2a_{10})(a_4a_8)a_6 \\ &= a_6^2 \cdot a_6^2 \cdot a_6 \\ &= a_6^5 \end{aligned}$$

이때, $a_5a_7 = a_6^2 = 6$ 이므로 $a_6 = \pm\sqrt{6}$

$$\therefore a_6^5 = \pm 36\sqrt{6}$$

17. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + kx - 8 = 0$ 의 세 근이 등비수열을 이룰 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a + ar + ar^2 = 7$ 에서
 $a(1 + r + r^2) = 7 \dots\dots\dots \textcircled{㉠}$
 $a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + a \cdot ar^2 = k$ 에서
 $a^2r(1 + r + r^2) = k \dots\dots\dots \textcircled{㉡}$
 $a \cdot ar \cdot ar^2 = 9$ 에서 $(ar)^3 = 8$
 $\therefore ar = 2 \dots\dots\dots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $k = a(1 + r + r^2) \cdot ar = 7 \times 2 = 14$
 $\therefore k = 14$

18. 5와 80 사이에 3개의 양수 x, y, z 를 이 순서대로 넣었더니 5개의 수 전체가 등비수열을 이루었다. 이때, $x + y + z$ 의 값은?

① 10 ② 20 ③ 40 ④ 60 ⑤ 70

해설

5, $x, y, z, 80$ 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r 라 하면

$$80 = 5r^4, \quad r^4 = 16 \quad \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\therefore x = 5r = 10, \quad y = 5r^2 = 20, \quad z = 5r^3 = 40$$

$$\therefore x + y + z = 10 + 20 + 40 = 70$$

19. 서로 다른 세 수 a, b, c 가 이 순서로 등차수열을 이루고, b, a, c 가 등비수열을 이룰 때, $3a + 2b + c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

b 는 a 와 c 의 등차중항이므로
 $2b = a + c \cdots \textcircled{㉠}$
 a 는 b 와 c 의 등비중항이므로
 $a^2 = bc \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $c = 2b - a$ 이므로 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $a^2 = b(2b - a), a^2 + ab - 2b^2 = 0$
 $(a + 2b)(a - b) = 0$
따라서 $a = -2b$ 또는 $a = b$
그런데, a, b 는 서로 다른 수 이므로 $a = -2b$
 $c = 2b - a = 2b - (-2b) = 4b$
따라서 $3a + 2b + c = -6b + 2b + 4b = 0$

20. 첫째항부터 제 3항까지의 합이 7, 제 4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합을 구하면?

- ① 320 ② 419 ③ 511 ④ 609 ⑤ 707

해설

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 7 \\ S_6 - S_3 &= \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} - 7 = 56 \\ \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} &= 63 \\ \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} &= 7 \times (r^3 + 1) = 63 \\ r^3 + 1 &= 9, \quad r^3 = 8 \\ \therefore r &= 2 \\ \frac{a(8 - 1)}{2 - 1} &= 7 \text{ 이므로 } a = 1 \\ \therefore S_9 &= \frac{a(r^9 - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^9 - 1 = 512 - 1 \\ &= 511 \end{aligned}$$

21. $1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$ 의 값은?

① 1310

② 1320

③ 1330

④ 1340

⑤ 1350

해설

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot (20 - 1) + 2 \cdot (20 - 2) + 3 \cdot (20 - 3) + \cdots + 19 \cdot (20 - 19) \\ &= \sum_{k=1}^{19} k(20 - k) = \sum_{k=1}^{19} (20k - k^2) \\ &= 20 \times \frac{19 \cdot 20}{2} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} \\ &= 190(20 - 13) = 1330 \end{aligned}$$

22. 수열 1, 2, 5, 10, 17, 26, ... 의 제 20항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 362

해설

1, 2, 5, 10, 17, 26

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
 1 3 5 7 9

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 \end{aligned}$$

$$a_n = n^2 - 2n + 2$$

$$\therefore a_{20} = 400 - 40 + 2 = 362$$

23. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행					1				
제2행				3	5	7			
제3행			9	11	13	15	17		
제4행	19	21	23	25	27	29	31		
⋮									

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$$\frac{(1)}{\text{제1군}}, \frac{(3, 5, 7)}{\text{제2군}}, \frac{(9, 11, 13, 15, 17)}{\text{제3군}}, \dots$$
각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 3, 9, 19, \dots$
 $\{b_n\} : 2, 6, 10, \dots$
 $\therefore b_n = 2 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 2$
 $\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$
이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는
 $163 + (5 - 1) \times 2 = 171$

24. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 일반항 a_n 은?

① 2^{n-1}

② $2^{n-1} + n - 1$

③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$

⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 양변에 $n = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 을 대입하여
변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

$$\vdots$$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^n - 1$$

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 이 성립하고 $a_1 = 1$ 일 때, $a_{10} + 1$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$ 에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$ 이므로 $\alpha = -1$

$\therefore a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$ 이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$