1. $4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2989

해설

$4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{3}k^3$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$

$=3025-36=2989$

2. 다음 중 옳은 것은?

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n}(3k-5)$

② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n}2(k+1)$

③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

④ $4+5+6+\cdots+(n+3)=\sum_{k=1}^{n}(k+3)$

⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

해설

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$
② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}2n$
③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$
⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n-2}(k+2)$

3. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k) - \sum_{k=4}^{10}(k^2+k)$$

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

해설

(준 식)$=\sum_{k=1}^{3}(k^2+k) = (1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3) = 20$

4. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{9} a_{k-1}$ 의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{10} a_{k-1}$

$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$

$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

5. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{\sum_{k=1}^{n}(2a_k - 3b_k + 5)\right\}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$$\sum_{n=1}^{10} \left\{2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{10}(2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10}(20n - 15n + 5n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$$
$$= 550$$

6. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$의 값은?

$$a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}\ (n = 1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{5}{12}$　③ $\frac{7}{16}$　④ $\frac{5}{24}$　⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3,\ \frac{1}{a_2} = 6$ 이므로

$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n,\ a_n = \frac{1}{3n}$

$a_3 = \frac{1}{9},\ a_4 = \frac{1}{12}\quad \therefore\ a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$

7. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29　② 31　③ 33　④ 35　⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로

a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 4 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 4 + 3n - 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

$\therefore a_{10} = 31$

8. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 5$

$\therefore\ a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 2 : 3$가 성립할 때, $a_1 : a_8$는? (단, $a \neq 0$이다.)

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 2 : 3 ④ 2 : 5 ⑤ 3 : 5

해설

$$3(a_1 + a_2) = 2(a_3 + a_4)$$
$$3(a + a + d) = 2(a + 2d + a + 3d)$$
$$6a + 3d = 4a + 10d$$
$$2a = 7d$$
$$\begin{aligned} a_1 : a_8 &= a : (a + 7d) \\ &= a : 3a = 1 : 3 \end{aligned}$$

10. 등차수열을 이루는 세 수에 대하여 세 수의 합이 15이고, 제곱의 합은 91일 때, 세 수의 곱은?

① 85 ② 90 ③ 95 ④ 100 ⑤ 105

해설

세 수를 $5-d$, 5, $5+d$라 할 수 있다.

$(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=91$

$75+2d^2=91$

$2d^2=16$

$d=\pm 2\sqrt{2}$

(i) $d=2\sqrt{2}$일 때

세수 : $5-2\sqrt{2}$, 5, $5+2\sqrt{2}$

$\therefore (5-2\sqrt{2})\times 5\times(5+2\sqrt{2})$

$=(25-8)\times 5=17\times 5=85$

(ii) $d=-2\sqrt{2}$일 때

세 수 : $5+2\sqrt{2}$, 5, $5-2\sqrt{2}$

$\therefore (5+2\sqrt{2})\times 5\times(5-2\sqrt{2})$

$=(25-8)\times 5=85$

$\therefore 85$

11. $a_5 = 31$, $a_{11} = 13$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 31$

$a_{11} = a + 10d = 13$

$6d = -18$

$d = -3$

$\therefore a = 31 + 4 \cdot 3 = 43$

$\therefore a_n = 43 + (n-1) \times (-3)$

$= -3n + 46$

$-3n + 46 < 0$ 인 정수 n의 최솟값을 구하면

$46 < 3n$

$15.\times\times < n$

$\therefore n = 16$

12. 두 수 2와 12 사이에 8개의 수를 넣어서 만든 수열 2, a_1, a_2, $\cdots$, a_8, 12가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_8$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$$2 + a_1 + \cdots + a_8 + 12$$
$$= \frac{10(2+12)}{2} = 70$$
$$\therefore a_1 + \cdots + a_8 = 70 - 14 = 56$$

13. $a_1 = 1,\ a_{10} = 37$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$이므로

$(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$

$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$

$= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200$

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 11$, $a_{14} = -11$일 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n의 최댓값은?

① 56　② 62　③ 64　④ 68　⑤ 70

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_3 = 11$에서
$a + 2d = 11 \cdots$ ㉠
$a_{14} = -11$에서 $a + 13d = -11 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 15$
$\therefore\ a_n = 15 + (n-1)\cdot(-2) = -2n + 17$
이때 S_n이 최대가 되려면 양수인 항만 모두 더하면 되므로
$-2n + 17 > 0$에서

$$2n < 17 \quad \therefore\ n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n의 최댓값은 S_8이므로

$$S_8 = \frac{8\{2\cdot 15 + 7\cdot(-2)\}}{2} = 64$$

15. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 2n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_2 + a_4 + a_6$의 값은?

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

해설

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= n^2 + 2n + 1 - \left\{(n-1)^2 + 2(n-1) + 1\right\}$$
$$= 2n + 1 (n \geq 2)$$
$$a_2 + a_4 + a_6 = 5 + 9 + 13 = 27$$

16. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5a_7=6$일 때, $a_2a_4a_6a_8a_{10}$의 값은?

① $\pm 6\sqrt{6}$ ② $\pm 18\sqrt{6}$ ③ $\pm 36\sqrt{6}$

④ $\pm 8\sqrt{6}$ ⑤ ± 243

해설

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 a_2, a_6, a_{10}과 a_4, a_6, a_8 그리고 a_5, a_6, a_7은 모두 등비수열을 이룬다.

따라서 a_6은 a_2와 a_{10}, a_4와 a_8, a_5와 a_7의 등비중항이므로

$$\begin{aligned} a_2a_4a_6a_8a_{10} &= (a_2a_{10})(a_4a_8)a_6 \\ &= a_6^2 \cdot a_6^2 \cdot a_6 \\ &= a_6^5 \end{aligned}$$

이때, $a_5a_7 = a_6^2 = 6$이므로 $a_6 = \pm\sqrt{6}$

$\therefore a_6^5 = \pm 36\sqrt{6}$

17. 삼차방정식 $x^3-7x^2+kx-8=0$의 세 근이 등비수열을 이룰 때, 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 근을 $a,\ ar,\ ar^2$이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=7$에서

$a(1+r+r^2)=7\ \cdots\cdots$ ㉠

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+a\cdot ar^2=k$에서

$a^2r(1+r+r^2)=k\cdots\cdots$ ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=9$에서 $(ar)^3=8$

$\therefore ar=2\ \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$k=a(1+r+r^2)\cdot ar=7\times 2=14$

$\therefore k=14$

18. 5와 80 사이에 3개의 양수 x, y, z를 이 순서대로 넣었더니 5개의 수 전체가 등비수열을 이루었다. 이때, $x+y+z$의 값은?

① 10　　② 20　　③ 40　　④ 60　　⑤ 70

해설

5, x, y, z, 80이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면

$80=5r^4$, $r^4=16$ $\therefore r=2(\because r>0)$

$\therefore x=5r=10$, $y=5r^2=20$, $z=5r^3=40$

$\therefore x+y+z=10+20+40=70$

19. 서로 다른 세 수 a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루고, b, a, c가 등비수열을 이룰 때, $3a+2b+c$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

b는 a와 c의 등차중항이므로

$2b=a+c\cdots$ ㉠

a는 b와 c의 등비중항이므로

$a^2=bc\cdots$ ㉡

㉠에서 $c=2b-a$이므로 ㉡에 대입하면

$a^2=b(2b-a)$, $a^2+ab-2b^2=0$

$(a+2b)(a-b)=0$

따라서 $a=-2b$ 또는 $a=b$

그런데, a, b는 서로 다른 수 이므로 $a=-2b$

$c=2b-a=2b-(-2b)=4b$

따라서 $3a+2b+c=-6b+2b+4b=0$

20. 첫째항부터 제 3항까지의 합이 7, 제 4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합을 구하면?

① 320 ② 419 ③ 511 ④ 609 ⑤ 707

해설

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 7$$

$$S_6 - S_3 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} - 7 = 56$$

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1} = 63$$

$$\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 7 \times (r^3+1) = 63$$

$$r^3+1=9,\ r^3=8$$

$$\therefore\ r=2$$

$\dfrac{a(8-1)}{2-1} = 7$이므로 $a=1$

$$\therefore S_9 = \frac{a(r^9-1)}{r-1} = \frac{1\cdot(2^9-1)}{2-1}$$
$$= 2^9 - 1 = 512 - 1$$
$$= 511$$

21. $1\cdot 19+2\cdot 18+3\cdot 17+\cdots 19\cdot 1$의 값은?

① 1310 ② 1320 ③ 1330 ④ 1340 ⑤ 1350

해설

$$1\cdot 19+2\cdot 18+3\cdot 17+\cdots 19\cdot 1$$
$$=1\cdot(20-1)+2\cdot(20-2)+3\cdot(20-3)+\cdots+19\cdot(20-19)$$
$$=\sum_{k=1}^{19}k(20-k)=\sum_{k=1}^{19}(20k-k^2)$$
$$=20\times\frac{19\cdot 20}{2}-\frac{19\cdot 20\cdot 39}{6}$$
$$=190(20-13)=1330$$

22. 수열 $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26, \cdots$ 의 제 20항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 362

해설

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & & 2, & & 5, & & 10, & & 17, & & 26 \\ & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 \end{aligned}$$

$a_n = n^2 - 2n + 2$

$\therefore a_{20} = 400 - 40 + 2 = 362$

23. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	11	13	15	17	
제4행	19	21	23	25	27	29	31
⋮				⋮			

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\underset{\text{제1군}}{\underline{(1)}}, \underset{\text{제2군}}{\underline{(3,\ 5,\ 7)}}, \underset{\text{제3군}}{\underline{(9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)}}, \cdots$ 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 9,\ 19, \cdots$

$\{b_n\} : 2,\ 6,\ 10, \cdots$

$\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-2) = 1 + 4 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$

이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는

$163 + (5-1) \times 2 = 171$

24. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항 a_n은?

① 2^{n-1} ② $2^{n-1} + n - 1$ ③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$ ⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2 \\
a_3 &= a_2 + 2^2 \\
&\vdots \\
+)\ \underline{a_n} &\underline{= a_{n-1} + 2^{n-1}} \\
a_n &= a_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
&= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\
&= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$