1. 첫째항이 7, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에서 -20은 몇째 항인가?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\times(-3) \\ &= 7 + (n-1)\times(-3) \end{aligned}$$

$\therefore a_n = -3n + 10$

$-3n + 10 = -20$

$-3n = -30$

$n = 10$

2. 세 수 $5-2x$, $4-x$, $6+3x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 1

해설

$5-2x$, $4-x$, $6+3x$가 등차수열을 이루면 $4-x$가 등차중항이므로

$$4-x=\frac{(5-2x)+(6+3x)}{2}$$

$$2(4-x)=5-2x+6+3x$$

$$8-2x=11+x$$

$$-3x=3 \quad \therefore\ x=-1$$

3. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$의 값은?

① 61　② 63　③ 65　④ 67　⑤ 69

해설

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^{5} 2^k$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67$

4. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460 ② 468 ③ 478 ④ 480 ⑤ 484

해설

$\sum_{k=1}^{10} k(k+2) = \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^{2} k(k+2)$

$= \sum_{k=1}^{10} (k^2+2k) - \sum_{k=1}^{2} (k^2+2k)$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k - (3+8)$

$= \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2} - 11$

$= 385 + 110 - 11$

$= 484$

5. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400 ② 425 ③ 450 ④ 475 ⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}l=\sum_{k=1}^{5}k+5l$

$\therefore$ (준 식) $=\sum_{l=1}^{10}(5l+15)=5\sum_{l=1}^{10}l+150$

$=5\times 55+150=425$

6. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$ ② $\frac{100}{101}$ ③ $\frac{200}{201}$ ④ $\frac{110}{101}$ ⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$

7. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3 인 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{20} = \dfrac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$

8. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9\log_3 2$ ② $10\log_3 2$ ③ $11\log_3 2$

④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

$a_1 = 1,\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9$

9. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 46 ⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$ 이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

10. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

> (i)$P(\boxed{(가)})$이 참이다.
> (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(가)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k　　② 0, $k+1$　　③ 0, $k-1$
④ 1, k　　⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.
(i) $P(\boxed{\ 1\ })$이 참이다.
(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{\mathrm{k+1}})$도 참이다.

11. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3인 등차수열의 일반항은
$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$이므로 공차가 9인 등차수열 ∴ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$이므로 공차가 6인 등차수열 ∴ 참

㉢ $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b)$
$= 6n + 3 + b$
이므로 공차가 6인 등차수열 ∴ 참

12. 0이 아닌 네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$과 $b,\ c,\ d$가 이 순서대로 각각 조화수열을 이룰 때, 다음 중 옳은 것은?

① $ad=bc$ ② $ab=cd$ ③ $abcd=1$
④ $a+b=d$ ⑤ $a-d=b-c$

해설

$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$가 조화수열을 이루면 $a,\ b,\ c$가 등차수열을 이루므로
$2b=a+c\cdots$㉠
또, $b,\ c,\ d$가 조화수열을 이루므로
$c=\frac{2bd}{b+d}\cdots$㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $c=\frac{(a+c)d}{b+d}$
$bc+cd=ad+cd\quad\therefore\ bc=ad$

13. 첫째항이 -10 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$a_1 = -10,\ a_7 = -10 + 6d$

$S_7 = \dfrac{7\{2 \cdot (-10) + 6d\}}{2},\ a_7 = S_7$ 에서 $d = 4$

$S_{10} = \dfrac{10\{2 \cdot (-10) + 9 \cdot 4\}}{2} = 80$

14. 첫째항이 -10 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 7 항까지의 합과 제 7 항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 80

해설

$S_7 = a_7$

$S_7 = \dfrac{7(2a+6d)}{2}$

$a_7 = a + 6d$

$\dfrac{7(2a+6d)}{2} = a + 6d$

$7a + 21d = a + 6d$

$6a = -15d$

$d = \dfrac{6 \times (-10)}{-15} = 4$

$\therefore S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$= \dfrac{10(-20+36)}{2}$

$= \dfrac{160}{2} = 80$

15. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = 11$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$ 일 때, a_{50}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$a_n = a + (n-1)d$라고 하면

$a_4 + a_7 + a_{10} = 3a + 18d = 11$

$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a + 35d = 20$

$\therefore\ a = \frac{5}{3},\ d = \frac{1}{3}$

$\therefore\ a_{50} = 18$

16. 첫째 날에 100 원, 둘째 날에 110 원, 셋째 날에 120 원 $\cdots$ 과 같이 매일 10 원씩 늘려 30 일간 저금통에 넣으면 적립한 총액은?

① 6450 ② 7350 ③ 7450 ④ 8250 ⑤ 8450

해설

$a = 100,\ d = 10$

$S_{30} = \dfrac{30\left\{2 \times 100 + (30-1) \cdot 10\right\}}{2} = 7350$

17. 이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근의 등차중항을 A, 등비중항을 G라 할 때, A^2, G^2을 두 근으로 하는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 $a+b$의 값은?

① 12　② 15　③ 24　④ 27　⑤ 39

해설

$x^2-6x+3=0$에서 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$

$\therefore A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{6}{2}=3,\ G=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{3}$

이 때, A^2, G^2 즉, 9와 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-9)(x-3)=0\ \therefore x^2-12+27=0$

따라서 $a=-12,\ b=27$

18. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36　② 45　③ 54　④ 63　⑤ 72

해설

첫째항을 9, 공비를 r이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r,\ 9r^2,\ 9r^3$으로 놓을 수 있다.
이때, $9r^4 = 144$이므로 $r^4 = 16$
$r^4 - 16 = 0,\ (r^2+4)(r^2+2)(r^2-2) = 0$
그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$
따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

19. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 다음의 세 조건

(i) $a,\ b,\ c$는 이 순서로 조화수열을 이룬다.

(ii) $a,\ c,\ b$는 이 순서로 공비가 1이 아닌 등비수열을 이룬다.

(iii) $-1 \le x \le 0$에서 $f(x)$의 최댓값은 -3이다.

를 만족할 때, $f(2)$의 값을 구하면?

① 15　② 20　③ 25　④ 30　⑤ 35

해설

(i)에서 $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$

(ii)에서 공비를 r라 하면 $c = ar,\ b = ar^2$

(i), (ii)에서 $\dfrac{2}{ar^2} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{ar}$

$\therefore r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2) = 0$

$r \neq 1$이므로 $r = -2$이고,

$c = -2a,\ b = 4a$

$\therefore f(x) = a(x+2)^2 - 6a$

구간 $-1 \le x \le 0$에서

$a > 0$ 일 때, 최댓값 $f(0) = -2a = -3$

$a < 0$ 일 때, 최댓값 $f(-1) = -5a = -3$(모순)

따라서, $a = \dfrac{3}{2},\ b = 6,\ c = -3$이므로

$f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 3$

$\therefore f(2) = 6 + 12 - 3 = 15$

20. 세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고 $a+b=17$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ab=8^2=64$
또, 조건에서 $a+b=17$이므로
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=17^2-2\cdot 64=161$

21. 서로 다른 세 실수 $9,\ a,\ b$는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $a,\ 9,\ b$는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $-\dfrac{45}{2}$ ② $-\dfrac{48}{2}$ ③ $-\dfrac{41}{2}$ ④ $-\dfrac{39}{2}$ ⑤ $-\dfrac{37}{2}$

해설

서로 다른 세 실수 $9,\ a,\ b$가 등차수열을 이루므로

$a=\dfrac{9+b}{2}$ ……㉠

세 수 $a,\ 9,\ b$가 등비수열을 이루므로

$9^2=ab$ ….㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$81=\dfrac{9+b}{2}\cdot b,\ b^2+9b-162=0$

$(b+18)(b-9)=0$

$\therefore b=-18$ 또는 $b=9$

즉, $b=-18$일 때 $a=-\dfrac{9}{2}$이고, $b=9$일 때 $a=9$

이때, $a,\ b$는 서로 다른 실수이므로

$a=-\dfrac{9}{2},\ b=-18$

$\therefore a+b=-\dfrac{45}{2}$

22. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10} = 48,\ S_{20} = 60$이다. 이때, S_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_{10} = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 48 \cdots$ ㉠

$S_{20} = \dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1} = 60 \cdots$ ㉡

㉡÷ ㉠을 하면

$\dfrac{r^{20}-1}{r^{10}-1} = \dfrac{5}{4},\ \dfrac{(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r^{10}-1} = \dfrac{5}{4}$

$r^{10}+1 = \dfrac{5}{4} \quad \therefore\ r^{10} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ S_n = \dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} \cdot (r^{20}+r^{10}+1)$

$= 48\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}+1\right) = 63$

23. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\log_2(S_n + k) = n - 1$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$\log_2(S_n + k) = n - 1$에서 $S_n + k = 2^{n-1}$
$\therefore\ S_n = 2^{n-1} - k$
$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1 - k$
$n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (2^{n-1} - k) - (2^{n-2} - k)$
$= 2^{n-1} - 2^{n-2}$
$= (2-1)2^{n-2} = 2^{n-2}$
이 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면 $S_1 = a_1$을 만족해야 하므로 $1 - k = 2^{-1}$ $\therefore\ k = \frac{1}{2}$

24. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n + k$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$S_n = 2 \cdot 3^n + k$에서

$a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 + k = 6 + k$

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k) \\ &= 2 \cdot 3^{n-1}(3-1) \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots$ 이 등비수열이 되려면

$\dfrac{a_2}{a_1} = 3$이어야 한다.

즉, $a_2 = 4 \cdot 3^{2-1} = 12$이므로 $\dfrac{12}{6+k} = 3$

$\therefore k = -2$

25. 다음 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

$1\cdot 1\cdot 3,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 3\cdot 5\cdot 7,\ 4\cdot 7\cdot 9,\ \cdots$

① 10050　② 11000　③ 11055
④ 12045　⑤ 12100

해설

주어진 수열의 일반항은 $n(2n-1)(2n+1)=4n^3-n$이므로
첫째항부터 제 10항까지의 합은
$\sum_{k=1}^{10}(4k^3-k)=4\cdot\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2-\frac{10\times 11}{2}$
$=12100-55=12045$

26. 방정식 $x^3-1=0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\sum_{k=1}^{3}(\alpha^k+\beta^k)$의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 두 허근 α, β는
$x^2+x+1=0$의 근이므로
$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1,\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1$
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{3}(\alpha^k+\beta^k)=(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^3+\beta^3)$
$=(-1)+(-1)+2=0$

27. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 r을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{19}$
$= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}$
$B = \sum_{k=1}^{10} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20}$
$= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19}$
$= r\left\{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\right\} = r \cdot A$

따라서 $r = \frac{B}{A}$

28. 수열 $\{a_n\}$이 1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n = \alpha^n$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$이다. 이때, 실수 α, β, γ의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\}$: 1, 3, 7, 15, 31, $\cdots$

$\quad\quad \vee \;\; \vee \;\; \vee \;\; \vee$

$\quad\quad 2 \;\; 4 \;\; 8 \;\; 16 \;\; \cdots \rightarrow b_n = 2^n$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$= 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

$\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$

29. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots$ ㉠

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots$ ㉡

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9-1)}{2-1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

30. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 에서 첫째항부터 제100항까지의 수 중에서 분모, 분자가 같은 항의 개수는?

① 6개　② 7개　③ 8개　④ 9개　⑤ 10개

해설

주어진 수열을 분모, 분자의 합이 같은 것끼리 묶으면

$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \cdots$

각 군의 항의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, ⋯ 이므로 제13군까지의 항의 개수는 91개이고, 제100항은 제14군의 9번째 항이 된다.
그런데 분자와 분모가 같은 항은 홀수군의 중앙에 오는 수이므로 홀수군, 즉 제1군, 제3군, 제5군, 제7군, 제9군, 제11군, 제13군의 가운데 수에 존재한다.
따라서 분모와 분자가 같은 항의 개수는 7개이다.

31. $a_1 = 110$인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1}$ $\therefore a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \frac{2}{n(n+1)}$

$\frac{2}{110} = 2$

32. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_2 = 4$이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 을 만족할 때, a_{100}의 값을 구하면?

① 2^{10} ② 2^{20} ③ 2^{40} ④ 2^{80} ⑤ 2^{100}

해설

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 2b_n$

이때, 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$

$a_n = 2^n$

$\therefore\ a_{100} = 2^{100}$

33. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> 증명
>
> (i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
> (ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
> $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$
> 양변에 (㉠)^{3}을 더하면
> $\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
> $\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
> $= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4}$
> $= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2$
> 따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
> (i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
> $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

> 해설
>
> (i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.
>
> (ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
>
> $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$
>
> 양변에 (㉠)^{3}을 더하면
>
> $\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$
>
> $\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$
>
> $= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$
>
> 따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
> (i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.
>
> 즉, $f(m) = m+1,\ g(m) = m+2$
> $\therefore f(5) = 5+1 = 6,\ g(6) = 6+2 = 8$
> $\therefore f(5)+g(6) = 6+8 = 14$