

1. 첫째항이 7, 공차가 -3 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 -20 은 몇째 항인가?

①

10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1) \times (-3) \\ &= 7 + (n-1) \times (-3)\end{aligned}$$

$$\therefore a_n = -3n + 10$$

$$-3n + 10 = -20$$

$$-3n = -30$$

$$n = 10$$

2. 세 수 $5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 1

해설

$5 - 2x$, $4 - x$, $6 + 3x$ 가 등차수열을 이루면 $4 - x$ 가 등차중항이므로

$$4 - x = \frac{(5 - 2x) + (6 + 3x)}{2}$$

$$2(4 - x) = 5 - 2x + 6 + 3x$$

$$8 - 2x = 11 + x$$

$$-3x = 3 \quad \therefore x = -1$$

3. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k)$ 의 값은?

① 61

② 63

③ 65

④ 67

⑤ 69

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = \sum_{k=1}^5 \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^5 2^k \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67\end{aligned}$$

4. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460

② 468

③ 478

④ 480

⑤ 484

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k(k+2) &= \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^2 k(k+2) \\&= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k) - \sum_{k=1}^2 (k^2 + 2k) \\&= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} k - (3 + 8) \\&= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 11 \\&= 385 + 110 - 11 \\&= 484\end{aligned}$$

5. $\sum_{l=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \}$ 의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\sum_{l=1}^5 (k+l) = \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l + 15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425 \end{aligned}$$

6. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$

② $\frac{100}{101}$

③ $\frac{200}{201}$

④ $\frac{110}{101}$

⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \\ &\quad \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201} \end{aligned}$$

7. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115

② 270

③ 326

④ 445

⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

8. $a_1 = 1, a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9 \log_3 2$

② $10 \log_3 2$

③ $11 \log_3 2$

④ 9

⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

$$a_1 = 1, r = \frac{a_2}{a_1} = 3 \text{이므로}$$

$$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$$

$$\therefore \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9 \log_3 3 = 9$$

9. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$$

10. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{\text{가}})$ 이 참이다.

(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{\text{가}})$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k

② 0, $k+1$

③ 0, $k-1$

④ 1, k

⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{1})$ 이 참이다.

(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{k+1})$ 도 참이다.

11. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$ 은 공차가 9인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 공차가 6인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$ 은 공차가 6인 등차수열이다.

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3인 등차수열의 일반항은

$$a_n = 3n + b \text{ (단, } b \text{는 상수)}$$

㉠ $3a_n = 9n + 3b$ 이므로 공차가 9인 등차수열 $\therefore$ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$ 이므로 공차가 6인 등차수열 $\therefore$ 참

$$\begin{aligned} \text{㉢ } \{2a_{2n} - a_{2n-1}\} &= 12n + 2b - (6n - 3 + b) \\ &= 6n + 3 + b \end{aligned}$$

이므로 공차가 6인 등차수열 $\therefore$ 참

12. 0이 아닌 네 실수 a, b, c, d 에 대하여 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 과 b, c, d 가 이 순서대로 각각 조화수열을 이룰 때, 다음 중 옳은 것은?

① $ad = bc$

② $ab = cd$

③ $abcd = 1$

④ $a + b = d$

⑤ $a - d = b - c$

해설

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 가 조화수열을 이루면 a, b, c 가 등차수열을 이루므로

$$2b = a + c \cdots \textcircled{㉠}$$

또, b, c, d 가 조화수열을 이루므로

$$c = \frac{2bd}{b+d} \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $c = \frac{(a+c)d}{b+d}$

$$bc + cd = ad + cd \quad \therefore bc = ad$$

13. 첫째항이 -10 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$$a_1 = -10, a_7 = -10 + 6d$$

$$S_7 = \frac{7 \{2 \cdot (-10) + 6d\}}{2}, a_7 = S_7 \text{에서 } d = 4$$

$$S_{10} = \frac{10 \{2 \cdot (-10) + 9 \cdot 4\}}{2} = 80$$

14. 첫째항이 -10 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 7항까지의 합과 제 7항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$$S_7 = a_7$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2}$$

$$a_7 = a + 6d$$

$$\frac{7(2a + 6d)}{2} = a + 6d$$

$$7a + 21d = a + 6d$$

$$6a = -15d$$

$$d = \frac{6 \times (-10)}{-15} = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{10} &= \frac{10(2a + 9d)}{2} \\ &= \frac{10(-20 + 36)}{2} \\ &= \frac{160}{2} = 80\end{aligned}$$

15. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = 11$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$ 일 때, a_{50} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$a_n = a + (n - 1)d \text{ 라고 하면}$$

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 3a + 18d = 11$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a + 35d = 20$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}, d = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_{50} = 18$$

16. 첫째 날에 100 원, 둘째 날에 110 원, 셋째 날에 120 원 ... 과 같이 매일 10 원씩 늘려 30 일간 저금통에 넣으면 적립한 총액은?

① 6450

② 7350

③ 7450

④ 8250

⑤ 8450

해설

$$a = 100, d = 10$$

$$S_{30} = \frac{30 \{2 \times 100 + (30 - 1) \cdot 10\}}{2} = 7350$$

17. 이차방정식 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 두 근의 등차중항을 A , 등비중항을 G 라 할 때, A^2 , G^2 을 두 근으로 하는 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 에서 $a + b$ 의 값은?

① 12

② 15

③ 24

④ 27

⑤ 39

해설

$x^2 - 6x + 3 = 0$ 에서 두 근을 α , β 라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 3$$

$$\therefore A = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3, G = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{3}$$

이 때, A^2 , G^2 즉, 9와 3을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x - 9)(x - 3) = 0 \quad \therefore x^2 - 12x + 27 = 0$$

따라서 $a = -12$, $b = 27$

18. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36

② 45

③ 54

④ 63

⑤ 72

해설

첫째항을 9, 공비를 r 이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r$, $9r^2$, $9r^3$ 으로 놓을 수 있다.

이때, $9r^4 = 144$ 이므로 $r^4 = 16$

$$r^4 - 16 = 0, (r^2 + 4)(r^2 + 2)(r^2 - 2) = 0$$

그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$

따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

19. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 다음의 세 조건

(i) a, b, c 는 이 순서로 조화수열을 이룬다.

(ii) a, c, b 는 이 순서로 공비가 1이 아닌 등비수열을 이룬다.

(iii) $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 -3 이다.

를 만족할 때, $f(2)$ 의 값을 구하면?

① 15

② 20

③ 25

④ 30

⑤ 35

해설

$$(i) \text{에서 } \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$(ii) \text{에서 공비를 } r \text{라 하면 } c = ar, b = ar^2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{2}{ar^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar}$$

$$\therefore r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2) = 0$$

$r \neq 1$ 이므로 $r = -2$ 이고,

$$c = -2a, b = 4a$$

$$\therefore f(x) = a(x+2)^2 - 6a$$

구간 $-1 \leq x \leq 0$ 에서

$$a > 0 \text{ 일 때, 최댓값 } f(0) = -2a = -3$$

$$a < 0 \text{ 일 때, 최댓값 } f(-1) = -5a = -3 \text{ (모순)}$$

따라서, $a = \frac{3}{2}, b = 6, c = -3$ 이므로

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$$

$$\therefore f(2) = 6 + 12 - 3 = 15$$

20. 세 수 a , 8 , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루고 $a + b = 17$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

세 수 a , 8 , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ab = 8^2 = 64$

또, 조건에서 $a + b = 17$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 17^2 - 2 \cdot 64 = 161$$

21. 서로 다른 세 실수 $9, a, b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, 9, b$ 는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① $-\frac{45}{2}$

② $-\frac{48}{2}$

③ $-\frac{41}{2}$

④ $-\frac{39}{2}$

⑤ $-\frac{37}{2}$

해설

서로 다른 세 실수 $9, a, b$ 가 등차수열을 이루므로

$$a = \frac{9+b}{2} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

세 수 $a, 9, b$ 가 등비수열을 이루므로

$$9^2 = ab \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$81 = \frac{9+b}{2} \cdot b, b^2 + 9b - 162 = 0$$

$$(b+18)(b-9) = 0$$

$$\therefore b = -18 \text{ 또는 } b = 9$$

$$\text{즉, } b = -18 \text{ 일 때 } a = -\frac{9}{2} \text{ 이고, } b = 9 \text{ 일 때 } a = 9$$

이때, a, b 는 서로 다른 실수이므로

$$a = -\frac{9}{2}, b = -18$$

$$\therefore a + b = -\frac{45}{2}$$

22. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $S_{10} = 48$, $S_{20} = 60$ 이다. 이때, S_{30} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 48 \cdots \textcircled{A}$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = 60 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} \div \textcircled{A}$ 을 하면

$$\frac{r^{20} - 1}{r^{10} - 1} = \frac{5}{4}, \quad \frac{(r^{10} + 1)(r^{10} - 1)}{r^{10} - 1} = \frac{5}{4}$$

$$r^{10} + 1 = \frac{5}{4} \quad \therefore r^{10} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore S_n = \frac{a(r^{30} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} \cdot (r^{20} + r^{10} + 1)$$

$$= 48 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 \right) = 63$$

23. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $\log_2(S_n + k) = n - 1$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되도록 하는 상수 k 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

$$\log_2(S_n + k) = n - 1 \text{ 에서 } S_n + k = 2^{n-1}$$

$$\therefore S_n = 2^{n-1} - k$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 1 - k$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때,}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2^{n-1} - k) - (2^{n-2} - k)$$

$$= 2^{n-1} - 2^{n-2}$$

$$= (2 - 1)2^{n-2} = 2^{n-2}$$

이 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면 $S_1 = a_1$ 을 만족

$$\text{해야 하므로 } 1 - k = 2^{-1} \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

24. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n + k$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$S_n = 2 \cdot 3^n + k \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 + k = 6 + k$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \cdot 3^n + k) - (2 \cdot 3^{n-1} + k) \\ &= 2 \cdot 3^{n-1}(3 - 1) \\ &= 4 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이 등비수열이 되려면

$$\frac{a_2}{a_1} = 3 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } a_2 = 4 \cdot 3^{2-1} = 12 \text{이므로 } \frac{12}{6+k} = 3$$

$$\therefore k = -2$$

25. 다음 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

$$1 \cdot 1 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 7, 4 \cdot 7 \cdot 9, \dots$$

① 10050

② 11000

③ 11055

④ 12045

⑤ 12100

해설

주어진 수열의 일반항은 $n(2n-1)(2n+1) = 4n^3 - n$ 이므로
첫째항부터 제 10항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (4k^3 - k) &= 4 \cdot \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 12100 - 55 = 12045\end{aligned}$$

26. 방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라고 할 때, $\sum_{k=1}^3 (\alpha^k + \beta^k)$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서 두 허근 α, β 는
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1, \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^3 (\alpha^k + \beta^k) &= (\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3) \\ &= (-1) + (-1) + 2 = 0\end{aligned}$$

27. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 r 을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

- ① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{19} \\ &= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} \\ &= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19} \\ &= r \{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\} = r \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } r = \frac{B}{A}$$

28. 수열 $\{a_n\}$ 이 1, 3, 7, 15, 31, ... 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항이 $b_n = a^n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$ 이다. 이때, 실수 α, β, γ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\{a_n\} : 1, 3, 7, 15, 31, \dots$$

$$\begin{array}{cccc} \vee & \vee & \vee & \vee \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{array} \dots \rightarrow b_n = 2^n$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -1$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$$

29. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$$

30. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 에서 첫째항부터 제100항까지의 수 중에서 분모, 분자가 같은 항의 개수는?

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

주어진 수열을 분모, 분자의 합이 같은 것끼리 묶으면

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \dots$$

각 군의 항의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, ... 이므로 제13군까지의 항의 개수는 91개이고, 제100항은 제14군의 9번째 항이 된다. 그런데 분자와 분모가 같은 항은 홀수군의 중앙에 오는 수이므로 홀수군, 즉 제1군, 제3군, 제5군, 제7군, 제9군, 제11군, 제13군의 가운데 수에 존재한다.

따라서 분모와 분자가 같은 항의 개수는 7개이다.

31. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = n^2 a_n \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1} \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \quad (n \geq 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} \quad \therefore a_{10} = 110 \times \\ &= 110 \times \frac{2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{110} = 2$$

32. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ 이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족할 때, a_{100} 의 값을 구하면?

① 2^{10}

② 2^{20}

③ 2^{40}

④ 2^{80}

⑤ 2^{100}

해설

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \text{ 에서}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n \text{ 으로 놓으면 } b_{n+1} = 2b_n$$

이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$$a_n = 2^n$$

$$\therefore a_{100} = 2^{100}$$

33. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\ominus)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\ominus)^3$$

$$= \frac{(m+1)^2 (\omin�)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\omin�)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i), (ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \text{ 이 성립한다.}$$

위의 증명 과정에서 $\ominus$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\omin�$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\ominus)^3$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i), (ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \text{ 이 성립한다.}$$

$$\text{즉, } f(m) = m + 1, g(m) = m + 2$$

$$\therefore f(5) = 5 + 1 = 6, g(6) = 6 + 2 = 8$$

$$\therefore f(5) + g(6) = 6 + 8 = 14$$