1. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_4 : a_9 = 2 : 5$ 일 때, a_{15} 의 값은?

① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

해설

첫째항을 a 라 하면 $a_n = a + (n-1) \cdot 3$ 이므로

$a_4 = a + 9,\ a_9 = a + 24$

이때, $(a+9) : (a+24) = 2 : 5$ 에서

$5(a+9) = 2(a+24)$

$\therefore\ a = 1$

$\therefore\ a_{15} = 1 + (15-1) \cdot 3 = 43$

2. 등차수열 2, 5, 8, 11, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하면?

① $n(3n+2)$　② $\frac{1}{2}n(3n+1)$　③ $\frac{1}{3}n(n+3)$

④ $n(2n-1)$　⑤ $\frac{1}{2}n(n+1)$

해설

$a=2,\ d=5-2=3$이므로

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)\cdot d\}}{2}$에 대입하면

$=\dfrac{n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 3\}}{2}$

$=\dfrac{n(4+3n-2)}{2}$

$=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

3. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$S_5 = \dfrac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a + 2d = 5 \cdots$ ㉠

$S_7 = \dfrac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a + 3d = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d = 2,\ a = 1$

$\therefore\ S_{10} = \dfrac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$

4. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

$16,\ \ -8,\ \ 4,\ \ -2, \cdots\cdots$

① $8(-2)^n$ ② $16(-2)^{n-1}$ ③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16 이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

5. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3,\ \sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$$
$$= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$$
$$= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3$$

6. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10}j\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(385+385)$$

$$=385$$

7. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = a\sqrt{2}+b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$= -\left\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right\}$

$+\left\{(\sqrt{49}-\sqrt{50})\right\}$

$= -(1-\sqrt{50}) = 5\sqrt{2}-1$

따라서, $a=5,\ b=-1$에서 $a+b=4$

8. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_9$ ② $a_{20}-a_{10}$ ③ $a_{21}-a_9$

④ $a_{21}-a_{10}$ ⑤ $a_{21}-a_{11}$

해설

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ 이므로

$a_{21}=a_1+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}$

$b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$

$=a_{21}-(a_1+b_1+b_2+\cdots b_9)$

$=a_{21}-a_{10}$

9. 표의 빈칸에 6개의 자연수를 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

3	5	7
6	8	10
9	11	13

$\therefore 5+6+8+10+9+13=51$

10. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b,\ a,\ a+b$라 하면 세 수의 합이 12이므로

$(a-b)+a+(a+b)=12,\ 3a=12$

$\therefore a=4$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$(4-d)\times 4\times(4+d)=28,\ 16-d^2=7$

$d^2=9\ \ \therefore d=\pm 3$

따라서 구하는 세 수는 $1, 4, 7$이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

11. 수열 $\{a_n\}$은 공차가 0이 아닌 등차수열이고, $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=20$ 일 때, a_2+a_8의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7$을 차례로 $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$로 놓으면

$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a=20$

$\therefore\ a=4$

이때, $a_2=a-3d,\ a_8=a+3d$이므로

$a_2+a_8=2a=8$

12. 0이 아닌 다섯 개의 수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$에 대하여 $a,\ b,\ c$는 이 순서로 조화수열을, $b,\ c,\ d$는 이 순서로 등비수열을, $c,\ d,\ e$는 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a,\ c,\ e$는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

② $a,\ c,\ e$는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

③ $a,\ c,\ e$는 이 순서로 조화수열을 이룬다.

④ $a,\ e,\ c$는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

⑤ $a,\ e,\ c$는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

해설

b는 a와 c의 조화중항이므로 $b=\dfrac{2ac}{a+c}\cdots$㉠

c는 b와 d의 등비중항이므로 $c^2=bc\cdots$㉡

d는 c와 e의 등차중항이므로 $d=\dfrac{c+e}{2}\cdots$㉢

㉠, ㉢을 ㉡에 대입하면

$$c^2=\frac{2ac}{a+c}\times\frac{c+e}{2},\ c^2=\frac{ac(c+e)}{a+c}$$

$$c=\frac{a(c+e)}{a+c},\ ac+c^2=ac+ae\quad\therefore c^2=ae$$

따라서, $a,\ c,\ e$는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

13. 부피가 8이고 겉넓이가 28인 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이 직육면체의 모서리의 길이의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a,\ ar,\ ar^2$ 이라 하면

(부피)$= a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = 8$

$\therefore\ ar = 2 \cdots ㉠$

(겉넓이)$= 2(a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a)$

$= 2\left\{a \cdot ar + (ar)^2 \cdot r + (ar)^2\right\}$

$= 2(2a + 4r + 2^2)$

$= 4a + 8r + 8 = 28$

$\therefore\ a + 2r = 5\ \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1,\ r = 2$ 또는 $a = 4,\ r = \dfrac{1}{2}$

따라서 (가로의 길이, 세로의 길이, 높이)가 $(1,\ 2,\ 4)$ 또는 $(4,\ 2,\ 1)$ 이므로 이 직육면체의 모서리의 길이의 합은 $4(1 + 2 + 4) = 28$

14. 수열 $a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

① $\dfrac{2a+4r^n}{r}$

② $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$

③ $\dfrac{a(1+r)+(1+r)^n}{r}$

④ $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^{2n}-1\right\}}{r}$

⑤ $\dfrac{a(1+r)-r^n+2}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n 인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$S=\frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{(1+r)-1}$$

$$=\frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$$

15. 첫째항부터 제3항까지의 합이 7, 제4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은? (단, 공비는 실수이다.)

① 498 ② 502 ③ 511 ④ 512 ⑤ 524

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 7 \cdots ㉠$$

$$S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 63 \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $7(r^3+1) = 63$

$r^3+1 = 9 \quad \therefore r = 2$

$r = 2$를 ㉠에 대입하면 $a(2^3-1) = 7 \quad \therefore \ a = 1$

$$S_9 = \frac{1 \cdot (2^9-1)}{2-1} = 512 - 1 = 511$$

16. 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = 4$, $S_{2n} = 12$이다. S_{6n}의 값은?

① 252 ② 272 ③ 292 ④ 312 ⑤ 332

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r \neq 1)$이라 하면

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = 4 \cdots ㉠$$

$$S_{2n} = \frac{a(r^{2n} - 1)}{r-1} = \frac{a(r^n - 1)(r^n + 1)}{r-1} = 12 \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(r^4 + 1) = 12$

$r^n + 1 = 3 \quad \therefore \ r^n = 2$

$$S_{6n} = \frac{a(r^{6n} - 1)}{r-1} = \frac{a(r^{2n} - 1)(r^{4n} + r^{2n} + 1)}{r-1}$$

$= 12(2^4 + 2^2 + 1) = 252$

17. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라 할 때, $a_1=1$, $S_n=a_{n+1}+n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에서 a_{11}의 값은?

① $1-2^7$　　② $1-2^8$　　③ $1-2^9$

④ $1-2^{10}$　　⑤ $1-2^{11}$

해설

$S_n=a_{n+1}+n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots$㉠

$S_{n-1}=a_n+(n-1)(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\cdots$㉡

㉠−㉡을 하면 $a_n=a_{n+1}-a_n+1$

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n-1(n=2,\ 3,\ 4,\cdots)$

양변에 -1을 더하여 정리하면 $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

즉, 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 a_2-1, 공비가 2인 등비수열 이므로

$a_n-1=(a_2-1)\cdot 2^{n-2}(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$S_1=a_2+1$이고, $S_1=a_1=1$이므로 $a_2=0$

따라서, $a_n=1-2^{n-2}(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$이므로

$a_{11}=1-2^9$

18. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$ 의 값은?

① $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$
② $\frac{n(3n+5)}{4(2n+1)(n+2)}$
③ $\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$
④ $\frac{n(3n+4)}{4(n+1)(n+2)}$
⑤ $\frac{n(3n+4)}{2(n+1)(n+2)}$

해설

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right\}$$
$$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

19. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값은?

(가) $a_{4n} = n^2 (n \geq 1)$
(나) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} (n \geq 1)$

① 210 ② 385 ③ 420 ④ 560 ⑤ 770

해설

(나)에서 $a_1 + a_2 + a_3 = a_4,\ a_5 + a_6 + a_7 = a_8, \cdots$ 이므로

$\sum_{k=1}^{40} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40})$

$= 2a_4 + 2a_8 + 2a_{12} + \cdots + 2a_{40}$

$= 2\sum_{k=1}^{10} a_{4k} = 2\sum_{k=1}^{10} k^2 (\because (가))$

$$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 770$$

20. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(1, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 3, 4)$\cdots$

① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

해설

제n군의 합을 a_n이라 하면

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \frac{10\cdot 11}{2}\right) \\ &= 220\end{aligned}$$