1. 제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 20번째 항은?

① 60　② 62　③ 64　④ 66　⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3 = a + 2d = 11 \cdots$ ㉠

$a_9 = a + 8d = 29 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 5,\ d = 3$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$

따라서 20번째 항은 $3 \times 20 + 2 = 62$

2. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_{10}$을 넣어 12개의 수 $48,\ a_1,\ a_2,\ \cdots, a_{10},\ 2$가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2}=300$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=300-(48+2)=300-50=250$

3. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$
$b-a=d$
$c-b=d$
$13-c=d$
좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리
더하면 $13-(-3)=4d\ \therefore d=4$
$\therefore a=-3+4=1$
$b=1+4=5$
$c=5+4=9$
$\therefore a+b+c=15$

4. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \sum_{k=1}^{10} k^2$

$= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k^2$

$= \dfrac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470$

5. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\dfrac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\dfrac{j^2+7i}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\dfrac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}(385+385)=385$

6. 다음 수열의 합을 $\sum$기호를 써서 나타내면?

$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$　② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$　③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$
④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$　⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로
$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

7. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$　② $\log 50$　③ $\log 55$　④ $\log 60$　⑤ $\log 66$

해설

$\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$

$= \log \dfrac{3}{1} + \log \dfrac{4}{2} + \log \dfrac{5}{3} + \cdots + \log \dfrac{11}{9} + \log \dfrac{12}{10}$

$= \log \left(\dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdots \dfrac{11}{9} \cdot \dfrac{12}{10} \right)$

$= \log \dfrac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$

8. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

① 9　　② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{99}-1$

④ $\sqrt{101}-1$　　⑤ 11

해설

(준식)$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-1=9$

9. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{n}{n+1}$ ③ $\frac{2n}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

10. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1}　② 2^n　③ 2^{n-2}　④ 2^{n+1}　⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

11. 등차수열 $3, 7, 11, 15, \cdots$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.
이때, ㉠+ ㉡+ ㉢의 값을 구하여라.

$$[㉠] = \frac{3 + [㉡]}{2}$$
$$[㉡] = \frac{[㉢] + 15}{2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \frac{3+11}{2}$, $11 = \frac{7+15}{2}$ 가 성립하므로
㉠는 7, ㉡는 11, ㉢는 7 이다.
$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ $= 7 + 11 + 7 = 25$

12. 삼차방정식 $x^3-3x^2+px+q=0$의 세 실근이 공차가 2인 등차수열을 이룰 때, $p+q$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

세 실근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해
$(a-d)+a+(a+d)=3$
$\therefore a=1$
$(1-d)\times 1\times(1+d)=-q$
$1-d^2=-q$
$(1-d)+(1+d)+(1-d)(1+d)=p$
$2+1-d^2=p$
$2-q=p$
$\therefore p+q=2$

13. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 77$
$a_{10} = a + 9d = 42$
$5d = -35$
$d = -7$
$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore\ a = 105$

$\therefore\ a_n = 105 + (n-1) \times (-7)$
$= -7n + 112$

$-7n + 112 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면
$112 < 7n$
$16 < n$
$\therefore n = 17$

14. 두 수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{1}{3}$의 사이에 세 개의 수 x, y, z를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 조화수열을 이루려면 7, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 3이 등차수열을 이루어야 하므로

$\frac{1}{x}=6$, $\frac{1}{y}=5$, $\frac{1}{z}=4$

$\therefore\ x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 60(x+y+z)=60\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=60\cdot\frac{37}{60}=37$

15. 4와 102 사이에 5개의 수를 넣어 등차수열을 만들려고 한다. 이때, 4와 102 사이에 넣을 5개의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 265

해설

항의 개수가 7개 이므로 7개 항의 합을 S_7, 구하는 수의 합을 S라 하면

$$S = S_7 - (4 + 102) = \frac{7(4 + 102)}{2} - 106 = 265$$

16. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 100$

$2a + 9d = 20$

$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$

$10(2a+19d) = 400$

$2a + 19d = 40$

$2a + 9d + 10d = 40$

$20 + 10d = 40$

$d = 2$

$\therefore 2a = 2,\ a = 1$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15\times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

17. 50과 100 사이의 자연수 중 3의 배수의 총합은?

① 1176　② 1200　③ 1225　④ 1275　⑤ 1300

해설

$50 \sim 100$ 사이의 3의 배수는
51에서 시작하여 99로 끝나는
공차가 3인 등차수열이므로
$\frac{(33-17+1)(51+99)}{2}$
$= \frac{17 \cdot 150}{2} = 1275$

18. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 각각 n^2+kn, $2n^2-2n+1$일 때, $a_{10}=b_{10}$을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

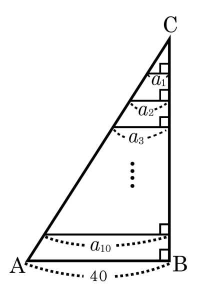
$a_{10}=(10^2+10k)-(9^2+9k)=19+k$

$b_{10}=(2\cdot10^2-2\cdot10+1)-(2\cdot9^2-2\cdot9+1)$
$=181-145=36$

$a_{10}=b_{10}$에서 $19+k=36$

$\therefore\ k=17$

19. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 a_1, a_2, $a_3, \cdots, a_{10}$이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

$a_1+a_{10}=40,\ a_2+a_9=40, \cdots, a_5+a_6=40$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=40\times 5=200$

20. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n = ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
$= (3ar-2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$
따라서 $r = 2$이고 $3ar - 2a = 12$이다.
$6a - 2a = 12,\ 4a = 12$
$\therefore\ a = 3$

21. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 15,\ a_3 + a_4 = 240$일 때, $a_1 + a_4$의 값은?

① 189 ② 192 ③ 195 ④ 198 ⑤ 201

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1 + a_2 = a + ar = a(1+r) = 15 \cdots$ ㉠

$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = ar^2(1+r) = 240 \cdots$ ㉡

㉡÷ ㉠을 하면 $r^2 = 16 \quad \therefore\ r = 4 (\because\ r > 0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$5a = 15 \quad \therefore\ a = 3$

따라서 $a_1 + a_4 = a + ar^3 = a(1 + r^3) = 3 \times 65 = 195$

22. 2와 162사이에 세 수 b_1, b_2, b_3을 넣었더니 2, b_1, b_2, b_3, 162의 순서로 등비수열을 이루었다. 이때 b_2의 값은?

① 12　② 18　③ 20　④ 24　⑤ 36

해설

2, b_1, b_2, b_3, 162가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 2, b_2, 162도 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ 2 \times 162 = {b_2}^2$

$\therefore\ b_2 = 18$ ($\because\ b_2 > 0$)

23. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $\frac{S_{3n}}{S_n}=7$일 때, $\frac{S_{2n}}{S_n}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a_1 이라고 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n}=\frac{\frac{a_1(r^{3n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}=7,\ \frac{r^{3n}-1}{r^n-1}=7$$

$$\frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1}=7,\ r^{2n}+r^n+1=7$$

$$(r^n)^2+r^n-6=0,\ (r^n+3)(r^n-2)=0$$

$$\therefore\ r^n=2(\because\ r>1)$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{\frac{a_1(r^{2n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}=\frac{r^{2n}-1}{r^n-1}$$

$$\frac{(r^n-1)(r^n+1)}{r^n-1}=r^n+1=3$$

24. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① 0　　② -1　　③ -2　　④ -3　　⑤ -4

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = (3 \cdot 2^1 + k)$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2-1) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdots$ ㉠

따라서, $n \geq 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면

㉠이 $n = 1$일 때에도 성립해야 하므로

$3 = 6 + k \quad \therefore \ k = -3$

25. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 25 ④ 27 ⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$

$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

26. 다음 군수열 $(2), (4,\ 6), (8,\ 10,\ 12), (14,\ \cdots), \ \cdots$ 에서 제 25군의 5번째 항은?

① 567 ② 589 ③ 602 ④ 610 ⑤ 612

해설

제 n군의 첫째항을 $\{a_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 2,\ 4,\ 8,\ 14,\ 22,\ \cdots$

$\quad\ \bigvee\ \bigvee\ \bigvee\ \bigvee$

$\{b_n\} : \ 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \ \cdots \rightarrow b_n = 2n$

따라서 $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = n^2 - n + 2$이다.

제25군의 첫째항은 $25^2 - 25 + 2 = 602$이고, 5번째 항은 $602 + 8 = 610$

27. 수열 $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (3,\ 0),$
$(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3),\ (4,\ 0)\cdots$ 에서 $(10,\ 9)$는 제 몇 항인가?

① 180 ② 189 ③ 198 ④ 199 ⑤ 206

해설

x좌표와 y좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면
$\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\},\ \{(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)\},$
$\{(3,\ 0),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3)\},\cdots$
$(10,\ 9)$은 좌표의 합이 19이므로 제19군의 10번째 항이다.
$\therefore (2+3+4+\cdots+19)+10=199$

28. 수열 $\{a_n\}$이 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$를 만족시킨다. $a_1 = 3,\ a_5 = 25$일 때, a_{33}의 값은?

① 175 ② 176 ③ 177 ④ 178 ⑤ 179

해설

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_1 = 3$이므로 $a_5 = 3 + 4d = 25 \quad \therefore d = \dfrac{11}{2}$
$\therefore a_{33} = 3 + 32 \times \dfrac{11}{2} = 3 + 176 = 179$

29. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$일 때, 일반항 a_n은 $a_n = pn^2 + qn + r$이다. 이때, p, q, r의 합 $p+q+r$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$a_{n+1} - a_n = 2n-1$의 양변에 $n = 1, 2, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$
\begin{array}{rl}
 & a_2 - a_1 = 1 \\
 & a_3 - a_2 = 3 \\
 & \quad\vdots \\
+) & a_n - a_{n-1} = 2n-3 \\
\hline
 & a_n - a_1 = 1 + 3 + \cdots + (2n-3)
\end{array}
$$

$$= \frac{(n-1)\{1+(2n-3)\}}{2} = n^2 - 2n + 1$$

$\therefore a_n = n^2 - 2n + 1 + a_1 = n^2 - 2n + 3$

$\therefore p + q + r = 1 + (-2) + 3 = 2$

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n = a_{n+1} - a_n = 2n - 1$

따라서 $n \ge 2$일 때,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\
&= 2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\
&= n^2 - 2n + 3 \cdots\cdots ㉠
\end{aligned}
$$

이때, $a_1 = 2$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 일반항은

$a_n = n^2 - 2n + 3$

$\therefore p + q + r = 1 + (-2) + 3 = 2$

30. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{20}의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$　② $2 \cdot 3^{19} + 1$　③ $2 \cdot 3^{20} - 1$

④ $2 \cdot 3^{20} + 1$　⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$꼴로 변형한다.
$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면
$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$에서
$-2\alpha = 2\ \therefore \alpha = -1$
즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$
따라서 수열 $\{a_n + 1\}$은
첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$이고 공비가 3인 등비수열이므로
$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$
$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$
$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

31. $a_1 = 9,\ a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수}) \\ a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수}) \end{cases}$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=11}^{20} a_k$ 의 값은?

① 15 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

$a_1 = 9,\ a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수}) \\ a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수}) \end{cases}$ 이므로 대입하면

$a_2 = 10,\ a_3 = 5,\ a_4 = 6,\ a_5 = 3,\ a_6 = 4,$
$a_7 = 2,\ a_8 = 1,\ a_9 = 2,\ a_{10} = 1,\ \cdots$ 로 $n \geq 7$ 이면 a_n 은 2와 1이 교대로 나온다.

$$\therefore \sum_{k=11}^{20} a_k = 2+1+2+1+\cdots+2+1 = 2\times5+1\times5 = 15$$

32. $a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_3=\dfrac{2+1}{3}=1$

$a_4=\dfrac{1+1}{2}=1$

$a_5=\dfrac{1+1}{1}=2$

$a_6=\dfrac{2+1}{1}=3$

$a_7=\dfrac{3+1}{2}=2$

$\vdots$

$\therefore\ a_1=a_6=a_{11}=\cdots=3$

$a_2=a_7=a_{12}=\cdots=2$

$a_3=a_8=a_{13}=\cdots=1$

$a_4=a_9=a_{14}=\cdots=1$

$a_5=a_{10}=a_{15}=\cdots=2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66} a_n=13(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+a_1$

$=13\times9+3=120$

33. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$
> 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면
> $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{\text{(가)}}$
> $=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\text{(가)}}$
> $=\boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$

양변에 $\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$ 를 더하면

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$

$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$

$=\boxed{\frac{k+1}{2k+3}}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.