1. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$

④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$

⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$의 부정은 $1 \leq x \leq 2$이다.

2. 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2-6x+8=0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0\le x<4$ 이고 $x\ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=2$ 또는 $x=4$, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$

② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$

③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$

④ $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x\ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$

⑤ 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

3. 다음 중 항상 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 $n,\ m$에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ $a,\ b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a,\ b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

4. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.'의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등하교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

5. 명제 'x 가 소수이면 x 는 홀수이다.' 는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

7. 두 조건 p, q 가 다음과 같을 때, 항상 참인 명제는?

$$p : 2x - 3 \ge 1 \qquad q : |x| < 2$$

① $p \to q$ ② $q \to p$ ③ $\sim p \to q$

④ $q \to \sim p$ ⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

$P : x \ge 2$, $Q : -2 < x < 2$

$P \subset Q^c \leftrightarrow Q \subset P^c$

$\therefore\ p \to \sim q$(참) $\leftrightarrow q \to \sim p$(참)

8. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a > 0$)
q : $x < -3$ 또는 $x > 1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

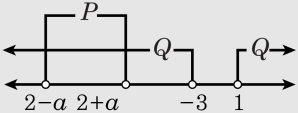
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

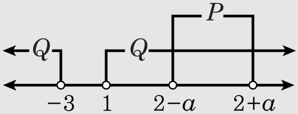
해설

$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore 2-a < x < 2+a$ $\therefore$
$P=\{x \mid 2-a < x < 2+a\}$, $Q=\{x \mid x < -3$ 또는 $x > 1\}$
따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \leq -3$ $\cdots$ ㉠ 또는 $2-a \geq 1$ $\cdots$ ㉡,
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$
그런데 $a > 0$이므로 구하는 a의 범위는 $0 < a \leq 1$

㉠ :



㉡ :



$\therefore \alpha=0,\ \beta=1$
$\therefore \alpha+\beta=1$

9. 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \geq k$ 이다.' 는 참이고, '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 1$ 이다.' 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-4 \leq k \leq -1$ ② $1 \leq k \leq 4$ ③ $-1 \leq k < 1$

④ $1 < k \leq 4$ ⑤ $-4 \leq k \leq 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \geq k$ 가 참이므로 $k \leq 4$

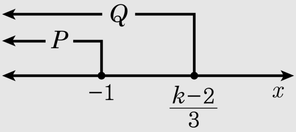
어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 1$ 이 거짓이므로 $k > 1$

$\therefore\ 1 < k \leq 4$

10. 명제 '$x \le -1$ 이면 $3x+2 \le k$ 이다.' 가 참일 때, 다음 중 상수 k 의 값으로 옳은 것은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설



$p : x \le -1,\ q : 3x+2 \le k$ 라 하고, 조건 $p,\ q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$ 라 할 때 명제 $p \to q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다.

$-1 \le \dfrac{k-2}{3},\ -3 \le k-2$

$\therefore\ k \ge -1$

11. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2 - ax + 2 \neq 0$에서 $q \rightarrow p$가 참일 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.

$x-2=0 \Rightarrow x^2-ax+2=0 \therefore a=3$

12. 세 조건 p, q, r에 대한 다음 추론 중 옳지 않은 것은?

① $p \to \sim q$ 이고 $r \to q$ 이면 $p \to \sim r$ 이다.

② $p \to \sim q$ 이고 $\sim r \to q$ 이면 $p \to r$ 이다.

③ $q \to \sim p$ 이고 $\sim q \to r$ 이면 $p \to r$ 이다.

④ $p \to q$ 이고 $\sim r \to \sim q$ 이면 $p \to r$ 이다.

⑤ $p \to q$ 이고 $q \to p$ 이면 $p \leftrightarrow \sim q$ 이다.

해설

⑤ $p \to q$, $q \to p$이면 $p \leftrightarrow q$이다.

13. 두 조건 $p : |x-1| = 2$, $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ________조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이

$P = \{-1,\ 3\}$, $Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

14. 다음 (　　　)에 『필요, 충분, 필요충분』 중에서 알맞은 것을 차례대로 써 넣어라.

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 (　　　)조건이다 평행사변형은 직사각형이기 위한 (　　　)조건이다.

▶ 답 : 　　　　　　　　　　 조건

▶ 답 : 　　　　　　　　　　 조건

▷ 정답 : 충분조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 충분 조건이다. 평행사변형은 직사각형이기 위한 필요 조건이다.

15. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단, a, b 는 실수)

(i) p : a, b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수
(ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

16. $x \geq a$가 $x^2 - 4 < 0$의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$가 $-2 < x < 2$의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

17. $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, a 의 최솟값을 m , b 의 최댓값을 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 a 의 최솟값은 3, b 의 최댓값은 -2 이다.

$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

18. $x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이고, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이므로
「$x \le a$ 이면 $x \le -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore \ a \le -1$
또, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건이므로
「$x \ge b$ 이면 $x \ge 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore \ b \ge 3$
따라서, a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 3이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$이다.

19. $0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이고, 필요조건이 $b+3 \le x \le 3$ 이다. a 의 최솟값을 m, b 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $m+M$ 의 값을 구하여라.

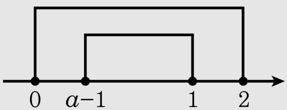
▶ 답 :

▷ 정답 : $m+M=-2$

해설

$0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이므로

$\{x \mid a-1 \le x \le 1\} \subset \{x \mid 0 \le x \le 2\}$



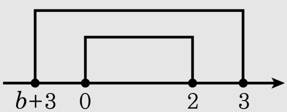
위의 그림에서 $0 \le a-1 \le 1$

$\therefore\ 1 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

또, $0 \le x \le 2$ 이기 위한 필요조건이

$b+3 \le x \le 3$ 이므로

$\{x \mid 0 \le x \le 2\} \subset \{x \mid b+3 \le x \le 3\}$



위의 그림에서 $b+3 \le 0$

$\therefore\ b \le -3 \cdots$ ㉡

㉠에서 a의 최솟값 $m=1$,

㉡에서 b의 최댓값 $M=-3$

$\therefore\ m+M=1+(-3)=-2$

20. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답 : ____조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$

$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$

$(P \cap U) \cap Q = P$

$P \cap Q = P$

$P \subset Q$

$\therefore \ p \Rightarrow q$

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

21. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ________ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ $\therefore$ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

$\therefore$ q 는 p 이기 위한 필요조건

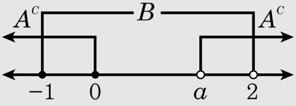
22. 실수 전체의 집합R의 두 부분집합 $A = \{x|0 < x \le a\}$, $B = \{x|-1 \le x < 2\}$가 $A^c \cup B = R$를 만족할 때, a의 값의 범위를 구하면? (단, $A \ne \varnothing$)

① $0 \le a < 2$　② $0 < a \le 2$　③ $0 \le a \le 2$

④ $0 < a < 2$　⑤ $-1 \le a < 5$

해설

$A \ne \varnothing$이므로, $a > 0$ 또 $A^c = \{x|x \le 0$ 또는 $x > a\}$



위의 그림에서 $A^c \cup B = R$가 되려면, $0 < a < 2$

해설

$A^c \cup B = R \leftrightarrow A \subset B$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

23. 두 조건 $p : |x-k| \le 1$, $q : -7 \le x \le 3$에서 명제 $p \to q$가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12　② -4　③ 8　④ 4　⑤ 12

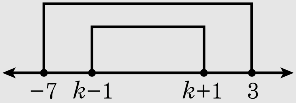
해설

$p : |x-k| \le 1$에서 $-1 \le x-k \le 1$

$\therefore k-1 \le x \le k+1 \cdots$ ㉠

$p \to q$가 참이면 ㉠이 $q : -7 \le x \le 3$에 포함되어야 한다.

수직선에 나타내면



$k-1 \ge -7 \ \therefore k \ge -6$

$k+1 \le 3 \ \therefore k \le 2$

따라서 k의 최솟값은 -6, k의 최댓값은 2 이다.

$\therefore -6+2=-4$

24. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y = -2+3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$'은 거짓이다.

25. 두 조건 $p : x \le 3-a$ 또는 $x \ge a$, $q : |x| \le 7$에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \ge 3$)

① $a > 10$　　② $a > 7$　　③ $a > 3$

④ $a > -1$　　⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로

$p \to \sim q$ 의 대우명제 $q \to \sim p$ 가 참이다.

p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$Q \subset P^c$ 이므로

$P^c = \{x \mid 3-a < x < a\}$,

$Q = \{x \mid -7 \le x \le 7\}$ 이므로

$3-a < -7$, $a > 7$

따라서 $a > 10$,$a > 7$ 이므로 $a > 10$

26. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　　② $q \to \sim p$　　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q$　$s \to \sim r$　$q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$