1. 수열 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ 에서 2014 번째 항은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 수열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 의 5 개의 숫자가 반복되므로 $2014 = 5 \times 402 + 4$ 에서 2014 번째 항은 4 이다.

2. 다음 군수열 $(2), (4,\ 6), (8,\ 10,\ 12), (14,\ \cdots),\ \cdots$ 에서 제 25군의 5번째 항은?

① 567 ② 589 ③ 602 ④ 610 ⑤ 612

해설

제 n군의 첫째항을 $\{a_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 2,\ 4,\ 8,\ 14,\ 22,\ \cdots$

$\qquad \vee\ \ \vee\ \ \vee\ \ \vee$

$\{b_n\} : \ 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \ \ \cdots \rightarrow b_n = 2n$

따라서 $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = n^2 - n + 2$이다.

제25군의 첫째항은 $25^2-25+2 = 602$이고, 5번째 항은 $602+8 = 610$

3. 수열 $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 100항까지의 합은?

① 930　② 945　③ 950　④ 955　⑤ 960

해설

$(1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 4,\ 4,\ 4), \cdots$ 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 n군의 항수는 n이므로 100 번째 항은

$\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} < 100$

에서 $\dfrac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제 14군의 9항이다.

그리고 제 n군까지의 합을 구해 보면

$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

첫째항부터 제 100항까지의 합 S_{100}은 제 13군까지의 합에 14를 9개 더한 값이 된다.

$\therefore S_{100} = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$

4. 두 수 0, 1을 사용하여 다음과 같은 수열을 만들었을 때, 10001 은 몇 번째 항인가?

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001$\cdots$

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

각 항의 자리 수에 따라 군수열을 만들면
(1), (10, 11), (100, 101, 110, 111),$\cdots$
10001 은 제 5군의 2번째 수이고 1 ~ 4군까지는
$1+2+4+8=15$개의 항이 있으므로
10001 은 $15+2=17$번째 항이다.

5. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(1, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 3, 4)$\cdots$

① 200　② 210　③ 220　④ 230　⑤ 240

해설

제n군의 합을 a_n이라 하면

$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \frac{10\cdot 11}{2}\right) \\ &= 220\end{aligned}$$

6. 다음 군수열에서 47은 몇 군의 몇째 항인가?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(2, 3),	(4, 5, 6),	(7, 8, 9, 10), $\cdots$

① 제9군의 9항 ② 제10군의 2항 ③ 제10군의 3항
④ 제11군의 2항 ⑤ 제11군의 3항

해설

각 군의 첫째항으로 만들어지는 수열
$\{a_n\}$에 대하여
$\{a_n\} : 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11, \cdots$
수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면
$\{b_n\} : 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$
$b_n = n$이므로 제 n군의 첫째항 a_n은
$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$
$a_{10} = 1 + \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 46$
따라서, 47은 제 10군의 2항이다.

7. 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$,에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

$1/\ 1,\ 2/1,\ 2,\ 3/\ 1,\ 2,\ 3,\ 4/\cdots$

1군은 1

2군은 $1,\ 2$

3군은 $1,\ 2,\ 3$이므로

7군은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

(6까지의 항의 총수)$= 1 + 2 + \cdots + 6 = 21$

$21 + 7 = 28$(번째 항)

8. 수열 $1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 9,\ \cdots$ 에서 13은 제 a항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제b항이라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면

$(1), (3,\ 3), (5,\ 5,\ 5), (7,\ 7,\ 7,\ 7), (9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9), \cdots$

이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.

6군까지의 항수가 $1+2+3+4+5+6=21$이므로 제 7군의 첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.

따라서 $a+b=22+28=50$

9. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{2015} 의 값은?

① $\frac{2012}{2013}$ ② $\frac{2013}{2014}$ ③ $\frac{2014}{2015}$ ④ $\frac{2015}{2016}$ ⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 n 항의 분자는 n 이고 분모는 $n+1$ 이다.
따라서 구하는 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.

$\therefore\ a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$

10. 다음 수열의 $\square$안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \square, \square \cdots$$

① $\frac{4}{21}$　② $\frac{8}{21}$　③ $\frac{10}{21}$　④ $\frac{14}{21}$　⑤ $\frac{16}{21}$

해설

군으로 나눠 보면

$\frac{1}{1} / \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} / \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1} /$

따라서 $\frac{1}{7}, \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.

$\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$

11. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 $\frac{5}{64}$ 는 제 몇 항인가?

① 제32항　　② 제33항　　③ 제34항

④ 제35항　　⑤ 제36항

해설

분모가 같은 것끼리 같은 군으로 묶으면

$(\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}), (\frac{1}{16}, \cdots), \cdots$

각 군의 첫째항은 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ 이므로 $\frac{1}{64}$ 는 제 6군의 첫째항이고, 각 군의 분자는 $1, 3, 5, 7, \cdots$ 이므로 $\frac{5}{64}$ 는 제 6군의 3번째 항이다.

각 군의 항수는 $1, 2, 4, 8, \cdots$ 이므로 구하는 항의 수는

$(1+2+4+8+16)+3=34$

12. $\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5 ② -7 ③ -8 ④ -79 ⑤ -80

해설

$\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$=\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{80}-\sqrt{81}$

$=\sqrt{1}-\sqrt{81}$

$=1-9=-8$

13. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

① 9　　② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{99}-1$
④ $\sqrt{101}-1$　　⑤ 11

해설

(준식)$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$
$=\sqrt{100}-1=9$

14. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

(준 식)$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

15. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$ ② $\frac{100}{101}$ ③ $\frac{200}{201}$ ④ $\frac{110}{101}$ ⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$

16. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ 의 값은?

① $\sqrt{n-1}-1$　② $\sqrt{n+1}-1$　③ $\sqrt{n+1}$
④ $\sqrt{n+1}+1$　⑤ $\sqrt{2n+1}+1$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

따라서

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1}-1$

17. $\sum_{k=1}^{49} \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = a\sqrt{2}+b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{49} \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{49} \dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$= -\left\{(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\right.$

$\left.+(\sqrt{49}-\sqrt{50})\right\}$

$= -(1-\sqrt{50}) = 5\sqrt{2}-1$

따라서, $a=5,\ b=-1$에서 $a+b=4$

18. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$　　② $\frac{2n}{n+1}$　　③ $\frac{n}{2n+1}$
④ $\frac{n}{n+2}$　　⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

(준 식)$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right\}$

$= \frac{1}{2}\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right\}$

$+ \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

19. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{n}{n+1}$ ③ $\frac{2n}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

20. 수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \cdots$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하면?

① $\frac{n+2}{2(n+1)}$ ② $\frac{2n}{(n+1)(n+2)}$

③ $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ ④ $\frac{2n+5}{2(n+3)}$

⑤ $\frac{2n(n+1)}{(n+3)(n+5)}$

해설

$a_k = \frac{1}{(k+1)^2-1} = \frac{1}{k(k+2)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$ 이므로

$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right\} + \cdots +$

$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

21. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{n}{n+1}$ ③ $\frac{2n}{n+1}$
④ $\frac{n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식) $= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\}$

$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

22. 함수 $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)}$의 값은?

① $\frac{40}{7}$ ② $\frac{45}{8}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ $\frac{57}{10}$ ⑤ $\frac{63}{11}$

해설

$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(x)} = \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

$= \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= 6\left(1 - \frac{1}{21}\right) = 6 \times \frac{20}{21} = \frac{40}{7}$

23. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$　② $\dfrac{11}{10}$　③ $\dfrac{10}{11}$　④ $\dfrac{20}{11}$　⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\dfrac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=2\left(1-\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{20}{11}$

24. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+2015}$ 의 값은?

① $\dfrac{2014}{2015}$ ② $\dfrac{2015}{2016}$ ③ $\dfrac{2015}{1008}$ ④ $\dfrac{2014}{1008}$ ⑤ 2

해설

$\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2}{n(n+1)}$ 이므로

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{2015}\dfrac{2}{n(n+1)}$

$=\sum_{k=1}^{2015}2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\dfrac{1}{2016}\right)=\dfrac{2\times 2015}{2016}=\dfrac{2015}{1008}$

25. 수열 $1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21, \cdots$ 의 제20항은?

① 377　　② 379　　③ 381　　④ 383　　⑤ 385

해설

$1,\quad 3,\quad 7,\quad 13,\quad 21, \cdots$

$\ \bigvee\quad \bigvee\quad \bigvee\quad \bigvee$

$\ \ 2\quad\ 4\quad\ 6\quad\ 8, \cdots$

주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 계차수열 $\{b_n\}$은 $2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots$ 로 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$

따라서 주어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_{20} = a_1 + \sum_{k=1}^{19} 2k = 1 + \sum_{k=1}^{19} 2k$

$= 1 + 2 \cdot \dfrac{19 \cdot 20}{2} = 381$

26. 다음 수열에서 $a+b$의 값을 구하여라.

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ a,\ b,\ \cdots$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1, & & 2, & & 4, & & 7, & & 11, & & 16, & & 22 \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \end{array}$$

$\therefore a=16,\ b=22$

$a+b=16+22=38$

27. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots$ ㉠

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots$ ㉡

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

28. $a_n = 1,\ a_2 = 2+3,\ a_3 = 4+5+6,\ a_4 = 7+8+9+10, \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$의 제10항의 값은?

① 515 ② 511 ③ 508 ④ 505 ⑤ 502

해설

$a_1 = 1$
$a_2 = 2+3$
$a_3 = 4+5+6$
$a_4 = 7+8+9+10$
$\vdots$
과 같은 수열 $\{a_n\}$은 연속된 자연수의 합으로 이루어진 수열로 a_9까지의 연속된 수들의 개수의 합은

$\sum_{k=1}^{9} k = \dfrac{9 \times 10}{2} = 45$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 46+47+48+\cdots+55 \\ &= \frac{10(46+55)}{2} \\ &= 505 \end{aligned}$$

29. 수열 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots$ 에서 제 20항은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ $\frac{5}{6}$　　④ 1　　⑤ $\frac{1}{7}$

해설

제1군　제2군　제3군　제5군

$(1),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\cdots\right),\cdots$

에서 제 1군부터 제 5군까지의 항수는

$1+2+3+4+5=15$

따라서, 제 20항은 제 6군의 5번째 항이므로

$\frac{5}{6}$ 이다.

30. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ 에서 첫째항부터 제100항까지의 수 중에서 분모, 분자가 같은 항의 개수는?

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

주어진 수열을 분모, 분자의 합이 같은 것끼리 묶으면

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \cdots$$

각 군의 항의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$ 이므로 제13군까지의 항의 개수는 91개이고, 제100항은 제14군의 9번째 항이 된다. 그런데 분자와 분모가 같은 항은 홀수군의 중앙에 오는 수이므로 홀수군, 즉 제1군, 제3군, 제5군, 제7군, 제9군, 제11군, 제13군의 가운데 수에 존재한다.

따라서 분모와 분자가 같은 항의 개수는 7개이다.

31. 수열 $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2),\ (3,\ 0),$
$(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3),\ (4,\ 0)\cdots$ 에서 $(10,\ 9)$는 제 몇 항인가?

① 180　② 189　③ 198　④ 199　⑤ 206

해설

x좌표와 y좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면
$\{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\},\ \{(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)\},$
$\{(3,\ 0),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (0,\ 3)\},\cdots$
$(10,\ 9)$은 좌표의 합이 19이므로 제19군의 10번째 항이다.
$\therefore (2+3+4+\cdots+19)+10=199$

32. 다음과 같은 수열에서 $(6,\ 4)$는 몇 번째 항인가?

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),$
$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ \cdots$

① 제40항　② 제41항　③ 제42항
④ 제43항　⑤ 제44항

해설

(합이 2인 순서쌍)$=$ 1개, (합이 3인 순서쌍)$=$ 2개, $\cdots$ 합이 9개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 $(6,\ 4)$는 여섯 번째이므로 42번째이다.

33. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	11	13	15	17	
제4행	19	21	23	25	27	29	31
⋮				⋮			

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{(3,\ 5,\ 7)}_{\text{제2군}}, \underbrace{(9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)}_{\text{제3군}}, \cdots$ 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 9,\ 19, \cdots$

$\{b_n\} : 2,\ 6,\ 10, \cdots$

$\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$

이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는

$163 + (5-1) \times 2 = 171$

34. $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 20}$ 일 때, $100S$ 의 값은?

① 95　② 100　③ 105　④ 110　⑤ 115

해설

$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 20}$
$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}$
$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$
$\therefore 100S=100\times\frac{19}{20}=95$

35. 수열 2, 3, 5, 9, 17, $\cdots$ 의 제 10항 까지의 합은?

① $2^9 - 1$ ② $2^9 + 1$ ③ $2^9 + 9$

④ $2^{10} - 1$ ⑤ $2^{10} + 9$

해설

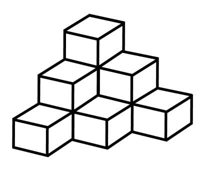
$$\begin{array}{ccccccccc} 2, & & 3, & & 5, & & 9, & & 17 \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 2 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2 + 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

$$a_n = 2^{n-1} + 1$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 10 \\ &= 2^{10} - 1 + 10 = 2^{10} + 9 \end{aligned}$$

36. 오른쪽 그림과 같이 3층탑을 쌓기 위해서는 10개의 정육면체가 필요하다. 이와 같은 모양의 탑을 10층으로 쌓을 때, 필요한 정육면체의 개수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 220

해설

n층으로 탑을 쌓을 때, 맨 위층에서부터 각 층에 필요한 정육면체의 수를 a_n이라 하면
수열 $\{a_n\}$은 $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \cdots$
이 때, 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $\{b_n\}$은 $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ 이므로 $b_n = n+1$이다.

$\therefore a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1+(2+3+4+\cdots+n) = \dfrac{n(n+1)}{2}(n \geq 1)$

따라서 10층으로 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 총 개수는

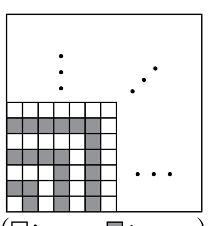
$\sum_{k=1}^{10} a_n = \sum_{k=1}^{10} \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10} n^2 + \sum_{k=1}^{10} n\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \dfrac{10 \cdot 11}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}(385+55) = 220$

37. 한 변이 100cm 인 정사각형 모양의 바닥을 한 변이 5cm 인 정사각형 모양의 타일로 빈틈없이 붙이려고 한다. 그림과 같이 흰색 타일과 검정색 타일로 바닥을 붙일 때, 필요한 흰색타일의 총 개수는?



(□ : 흰색 타일, ■ : 검정색 타일)

① 185　② 190　③ 200　④ 205　⑤ 210

해설

흰색 타일의 총 개수는

$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 5,\ a_3 = 1 + 5 + 9, \cdots$

$a_{10} = 1 + 5 + 9 + \cdots + 37 = \dfrac{10(1+37)}{2} = 190$

38. 오른쪽 그림과 같이 수를 배열할 때 위에서 10 번째 행, 왼쪽에서 7번째 열의 수는?

1	2	4	7	11	⋯
3	5	8	12		
6	9	13			
10	14				
15					
⋮					

① 130 ② 138 ③ 142

④ 152 ⑤ 146

해설

각 행의 첫 번째 수로 만들어지는 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ \ 3,\ \ 6,\ \ 10,\ \ 15,\ \ \cdots$

$\qquad\ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee$

$\qquad\ 2\ \ \ 3\ \ \ 4\ \ \ 5\ \ \cdots$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \dfrac{n^2+n}{2}$

각 행을 이루는 수열들을 살펴보면 모두 계차수열을 이루고, 제10행은 각 항의 계차가 10, 11, 12, $\cdots$ 인 계차수열을 이룬다.

따라서 제10행의 첫 번째 수는

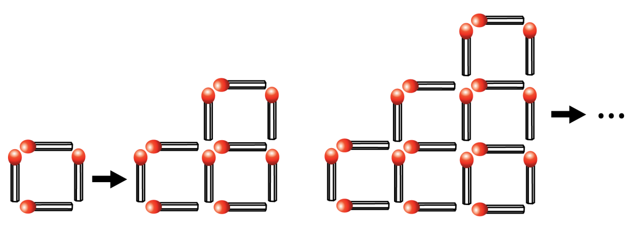
$a_{10} = \dfrac{10^2+10}{2} = 55$ 이고

제10행의 7번째 열의 수는

$55 + (10+11+12+13+14+15)$

$= 55 + \dfrac{6(10)+15)}{2} = 130$

39. 길이가 같은 성냥개비 20개를 다음 그림과 같은 방법으로 쌓아 완성된 계단 모양을 한 개 만들려고 한다. 20개를 모두 쌓았더니 성냥개비 몇 개가 부족하여 계단을 완성할 수 없었다. 계단을 완성하기 위해 필요한 성냥개비의 최소의 개수는?

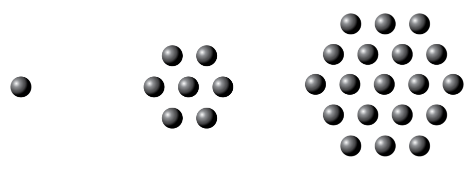


① 6개　② 7개　③ 8개　④ 9개　⑤ 10개

해설

필요한 성냥개비의 수가 이루는 수열
$\{a_n\}$은 다음과 같다.
$\{a_n\} : 4,\ 10,\ 18,\ 28, \cdots$
$\{b_n\} : 6,\ 8,\ 10, \cdots$
$b_n = 2n + 4$이므로
$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k + 4)$
$= 4 + 2 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} + 4(n-1)$
$= n^2 + 3n \ (n \geq 2)$
이것은 $n = 1$일 때도 성립하므로
$a_n = n^2 + 3n$
$\therefore n = 3$일 때, $a_3 = 18$,
$n = 4$일 때, $a_4 = 28$
따라서, 필요한 최소의 개수는 $28 - 20 = 8$(개)이다.

40. 아래 그림과 같이 정육각형 모양이 되도록 배열한 바둑알의 개수를 육각형정수라 한다.
예를 들면, 첫번째 육각형정수는 1이고, 두 번째 육각형정수는 7이다.
이때, 10번째 육각형 정수를 구하여라.



[첫 번째]　[두 번째]　[세 번째]

▶ 답 :

▷ 정답 : 271

해설

바둑알의 개수를 차례로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하고, 그 계차 수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\}: 1,\ 7,\ 19,\ 37,\ \cdots$

$\{b_n\}: 6,\ 12,\ 18,\ \cdots$

이때, $b_n = 6n$이므로

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k$

$= 1 + 6 \times \dfrac{(n-1)n}{2}$

$= 3n^2 - 3n + 1$

$\therefore\ a_{10} = 300 - 30 + 1 = 271$