

1. 수열 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, ... 에서 2014 번째 항은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

주어진 수열은 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자가 반복되므로
 $2014 = 5 \times 402 + 4$ 에서 2014 번째 항은 4이다.

2. 다음 군수열 (2), (4, 6), (8, 10, 12), (14, ...), ... 에서 제 25군의 5 번째 항은?

① 567

② 589

③ 602

④ 610

⑤ 612

해설

제 n 군의 첫째항을 $\{a_n\}$ 이라 하면

$\{a_n\} : 2, 4, 8, 14, 22, \dots$

$\vee \vee \vee \vee$

$\{b_n\} : 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots \rightarrow b_n = 2n$

따라서 $a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = n^2 - n + 2$ 이다.

제 25군의 첫째항은 $25^2 - 25 + 2 = 602$ 이고, 5 번째 항은 $602 + 8 = 610$

3. 수열 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... 에서 첫째항부터 제 100 항까지의 합은?

① 930

② 945

③ 950

④ 955

⑤ 960

해설

(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), ... 와 같이 같은 수끼리 묶으면 군수열이 만들어지고, 제 n 군의 항수는 n 이므로 100 번째 항은

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} < 100$$

에서 $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$ 이므로 제 14 군의 9 항이다.

그리고 제 n 군까지의 합을 구해 보면

$$1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \cdots n \times n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 이므로}$$

첫째항부터 제 100 항까지의 합 S_{100} 은 제 13 군까지의 합에 14 를 9 개 더한 값이 된다.

$$\therefore S_{100} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 = 945$$

4. 두 수 0, 1을 사용하여 다음과 같은 수열을 만들었을 때, 10001은 몇 번째 항인가?

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001...

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

해설

각 항의 자리 수에 따라 군수열을 만들면

(1), (10, 11), (100, 101, 110, 111),...

10001은 제 5군의 2번째 수이고 1 ~ 4군까지는

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$ 개의 항이 있으므로

10001은 $15 + 2 = 17$ 번째 항이다.

5. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군 제2군 제3군 제4군
(1), (1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4)...

① 200

② 210

③ 220

④ 230

⑤ 240

해설

제 n 군의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= 220\end{aligned}$$

6. 다음 군수열에서 47은 몇 군의 몇째 항인가?

제1군 제2군 제3군 제4군

(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10),...

① 제9군의 9항

② 제10군의 2항

③ 제10군의 3항

④ 제11군의 2항

⑤ 제11군의 3항

해설

각 군의 첫째항으로 만들어지는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\{a_n\} : 1, 2, 4, 7, 11, \dots$

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$\{b_n\} : 1, 2, 3, 4, \dots$

$b_n = n$ 이므로 제 n 군의 첫째항 a_n 은

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_{10} = 1 + \frac{10 \cdot 9}{2} = 46$$

따라서, 47은 제 10군의 2항이다.

7. 수열 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, $\dots$,에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

1/ 1, 2/1, 2, 3/ 1, 2, 3, 4/ $\dots$

1군은 1

2군은 1, 2

3군은 1, 2, 3이므로

7군은 1, 2, 3, $\dots$, 7

(6까지의 항의 총수) = $1 + 2 + \dots + 6 = 21$

$21 + 7 = 28$ (번째 항)

8. 수열 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 9, ... 에서 13은 제 a 항까지 계속된다. 마지막으로 나오는 13을 제 b 항이라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

같은 숫자끼리 괄호로 묶으면

(1), (3, 3), (5, 5, 5), (7, 7, 7, 7), (9, 9, 9, 9, 9), ...

이 수열의 규칙을 살펴보면 13은 제 7군에 속한다.

6군까지의 항수가 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ 이므로 제 7군의 첫째항은 제 22항이고, 끝항은 제 28항이 된다.

따라서 $a + b = 22 + 28 = 50$

9. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{2015} 의 값은?

① $\frac{2012}{2013}$

② $\frac{2013}{2014}$

③ $\frac{2014}{2015}$

④ $\frac{2015}{2016}$

⑤ $\frac{2016}{2017}$

해설

주어진 수열의 각 항에서 분모는 분자보다 1만큼 크므로 제 n 항의 분자는 n 이고 분모는 $n+1$ 이다.

따라서 구하는 수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다.

$$\therefore a_{2015} = \frac{2015}{2015+1} = \frac{2015}{2016}$$

10. 다음 수열의 안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \square, \square \dots$$

① $\frac{4}{21}$

② $\frac{8}{21}$

③ $\frac{10}{21}$

④ $\frac{14}{21}$

⑤ $\frac{16}{21}$

해설

군으로 나눠 보면

$$\frac{1}{1} / \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} / \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1} /$$

따라서 $\frac{1}{7}, \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$$

11. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 $\frac{5}{64}$ 는 제 몇 항인가?

① 제32 항

② 제33 항

③ 제34 항

④ 제35 항

⑤ 제36 항

해설

분모가 같은 것끼리 같은 군으로 묶으면

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \left(\frac{1}{16}, \dots\right), \dots$$

각 군의 첫째항은 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 이므로 $\frac{1}{64}$ 는 제 6군의 첫째항이

고, 각 군의 분자는 1, 3, 5, 7, ... 이므로 $\frac{5}{64}$ 는 제 6군의 3번째 항이다.

각 군의 항수는 1, 2, 4, 8, ... 이므로 구하는 항의 수는
 $(1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 3 = 34$

12. $\sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$ 의 값은?

① -5

② -7

③ -8

④ -79

⑤ -80

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{80} - \sqrt{81} \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{81} \\ &= 1 - 9 = -8 \end{aligned}$$

13. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

① 9

② $3\sqrt{11} - \sqrt{2}$

③ $\sqrt{99} - 1$

④ $\sqrt{101} - 1$

⑤ 11

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\&= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\&= \sqrt{100} - 1 = 9\end{aligned}$$

14. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} \\&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \\&= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

15. $\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{101}{100}$

② $\frac{100}{101}$

③ $\frac{200}{201}$

④ $\frac{110}{101}$

⑤ $\frac{201}{200}$

해설

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \\ &\quad \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201} \end{aligned}$$

16. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ 의 값은?

① $\sqrt{n-1} - 1$

② $\sqrt{n+1} - 1$

③ $\sqrt{n+1}$

④ $\sqrt{n+1} + 1$

⑤ $\sqrt{2n+1} + 1$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1\end{aligned}$$

17. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = a\sqrt{2} + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= -\{(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \cdots\} \\ &\quad + \{(\sqrt{49} - \sqrt{50})\} \\ &= -(1 - \sqrt{50}) = 5\sqrt{2} - 1 \\ &\text{따라서, } a = 5, b = -1 \text{ 에서 } a + b = 4 \end{aligned}$$

18. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{n}{2n+1}$

④ $\frac{n}{n+2}$

⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\} \\&= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \right\} \\&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}\end{aligned}$$

19. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

④ $\frac{2n}{2n+1}$

⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

20. 수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \dots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구하면?

① $\frac{n+2}{2(n+1)}$

② $\frac{2n}{(n+1)(n+2)}$

③ $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

④ $\frac{2n+5}{2(n+3)}$

⑤ $\frac{2n(n+1)}{(n+3)(n+5)}$

해설

$$a_k = \frac{1}{(k+1)^2-1} = \frac{1}{k(k+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \text{ 이므로}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right\} + \dots +$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

21. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

④ $\frac{n}{2n+1}$

⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right\}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$$

22. 함수 $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)}$ 의 값은?

① $\frac{40}{7}$

② $\frac{45}{8}$

③ $\frac{17}{3}$

④ $\frac{57}{10}$

⑤ $\frac{63}{11}$

해설

$$\begin{aligned} f(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(x)} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = 6 \times \frac{20}{21} = \frac{40}{7} \end{aligned}$$

23. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\frac{9}{10}$

② $\frac{11}{10}$

③ $\frac{10}{11}$

④ $\frac{20}{11}$

⑤ $\frac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{20}{11}$$

24. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+2015}$ 의 값은?

① $\frac{2014}{2015}$

② $\frac{2015}{2016}$

③ $\frac{2015}{1008}$

④ $\frac{2014}{1008}$

⑤ 2

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \text{ 이므로}$$

$$(\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^{2015} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{2015} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2016} \right) = \frac{2 \times 2015}{2016} = \frac{2015}{1008}$$

25. 수열 1, 3, 7, 13, 21, ... 의 제20항은?

① 377

② 379

③ 381

④ 383

⑤ 385

해설

1, 3, 7, 13, 21, ...

∨ ∨ ∨ ∨

2 4 6 8, ...

주어진 수열의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 계차수열 $\{b_n\}$ 은
2, 4, 6, 8, ... 로 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$$

따라서 주어진 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$a_{20} = a_1 + \sum_{k=1}^{19} 2k = 1 + \sum_{k=1}^{19} 2k$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{19 \cdot 20}{2} = 381$$

26. 다음 수열에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.

1, 2, 4, 7, 11, a , b , ...

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22

∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨

1 2 3 4 5 6

$\therefore a = 16, b = 22$

$a + b = 16 + 22 = 38$

27. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$$

28. $a_n = 1, a_2 = 2 + 3, a_3 = 4 + 5 + 6, a_4 = 7 + 8 + 9 + 10, \dots$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 제10항의 값은?

① 515

② 511

③ 508

④ 505

⑤ 502

해설

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 + 3$$

$$a_3 = 4 + 5 + 6$$

$$a_4 = 7 + 8 + 9 + 10$$

$\vdots$

과 같은 수열 $\{a_n\}$ 은 연속된 자연수의 합으로 이루어진 수열로 a_9 까지의 연속된 수들의 개수의 합은

$$\sum_{k=1}^9 k = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

$$a_{10} = 46 + 47 + 48 + \dots + 55$$

$$= \frac{10(46 + 55)}{2}$$

$$= 505$$

29. 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ 에서 제 20 항은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{5}{6}$

④ 1

⑤ $\frac{1}{7}$

해설

제1군 제2군 제3군 제5군

$$(1), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots\right), \dots$$

에서 제 1군부터 제 5군까지의 항수는

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

따라서, 제 20 항은 제 6군의 5 번째 항이므로

$\frac{5}{6}$ 이다.

30. $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 에서 첫째항부터 제100항까지의 수 중에서 분모, 분자가 같은 항의 개수는?

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

주어진 수열을 분모, 분자의 합이 같은 것끼리 묶으면

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \dots$$

각 군의 항의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, ... 이므로 제13군까지의 항의 개수는 91개이고, 제100항은 제14군의 9번째 항이 된다. 그런데 분자와 분모가 같은 항은 홀수군의 중앙에 오는 수이므로 홀수군, 즉 제1군, 제3군, 제5군, 제7군, 제9군, 제11군, 제13군의 가운데 수에 존재한다.

따라서 분모와 분자가 같은 항의 개수는 7개이다.

31. 수열 $(1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0),$
 $(2, 1), (1, 2), (0, 3), (4, 0) \cdots$ 에서 $(10, 9)$ 는 제 몇 항인가?

① 180

② 189

③ 198

④ 199

⑤ 206

해설

x 좌표와 y 좌표의 합이 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\{(1, 0), (0, 1)\}, \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\},$

$\{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}, \cdots$

$(10, 9)$ 은 좌표의 합이 19이므로 제19군의 10번째 항이다.

$$\therefore (2 + 3 + 4 + \cdots + 19) + 10 = 199$$

32. 다음과 같은 수열에서 (6, 4)는 몇 번째 항인가?

(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1),
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), (2, 4), ...

① 제40 항

② 제41 항

③ 제42 항

④ 제43 항

⑤ 제44 항

해설

(합이 2인 순서쌍)= 1개, (합이 3인 순서쌍)= 2개, ... 합이 9
개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$
이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 (6, 4)는 여섯 번째이므로 42
번째이다.

34. $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{19 \cdot 20}$ 일 때, $100S$ 의 값은?

① 95

② 100

③ 105

④ 110

⑤ 115

해설

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{19 \cdot 20} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\ &= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} \\ \therefore 100S &= 100 \times \frac{19}{20} = 95 \end{aligned}$$

35. 수열 2, 3, 5, 9, 17, ... 의 제 10항 까지의 합은?

① $2^9 - 1$

② $2^9 + 1$

③ $2^9 + 9$

④ $2^{10} - 1$

⑤ $2^{10} + 9$

해설

2, 3, 5, 9, 17

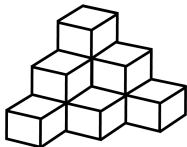
$\begin{array}{cccc} \vee & \vee & \vee & \vee \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{array}$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 2 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2 + 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

$$a_n = 2^{n-1} + 1$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 10 \\ &= 2^{10} - 1 + 10 = 2^{10} + 9 \end{aligned}$$

36. 오른쪽 그림과 같이 3층탑을 쌓기 위해서는 10개의 정육면체가 필요하다. 이와 같은 모양의 탑을 10층으로 쌓을 때, 필요한 정육면체의 개수를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 220

해설

n 층으로 탑을 쌓을 때, 맨 위층에서부터 각 층에 필요한 정육면체의 수를 a_n 이라 하면

수열 $\{a_n\}$ 은 1, 3, 6, 10, 15, ...

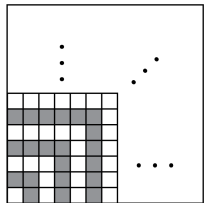
이 때, 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 $\{b_n\}$ 은 2, 3, 4, 5, ... 이므로 $b_n = n + 1$ 이다.

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 1 + (2+3+4+\cdots+n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \geq 1)$$

따라서 10층으로 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 총 개수는

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_n &= \sum_{k=1}^{10} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} n^2 + \sum_{k=1}^{10} n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 55) = 220 \end{aligned}$$

37. 한 변이 100cm 인 정사각형 모양의 바닥을 한 변이 5cm 인 정사각형 모양의 타일로 빈틈없이 붙이려고 한다. 그림과 같이 흰색 타일과 검정색 타일로 바닥을 붙일 때, 필요한 흰색타일의 총 개수는?



(□: 흰색 타일, ■: 검정색 타일)

① 185

② 190

③ 200

④ 205

⑤ 210

해설

흰색 타일의 총 개수는

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + 5, a_3 = 1 + 5 + 9, \dots$$

$$a_{10} = 1 + 5 + 9 + \dots + 37 = \frac{10(1 + 37)}{2} = 190$$

38. 오른쪽 그림과 같이 수를 배열할 때 위에서 10번째 행, 왼쪽에서 7번째 열의 수는?

1	2	4	7	11	...
3	5	8	12		
6	9	13			
10	14				
15					
⋮					

- ① 130 ② 138 ③ 142
 ④ 152 ⑤ 146

해설

각 행의 첫 번째 수로 만들어지는 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 3, 6, 10, 15, \dots$

$$\begin{array}{cccc} \vee & \vee & \vee & \vee \\ 2 & 3 & 4 & 5 \dots \end{array}$$

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{n^2 + n}{2}$$

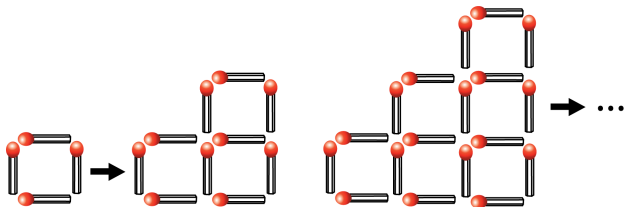
각 행을 이루는 수열들을 살펴보면 모두 계차수열을 이루고, 제 10행은 각 항의 계차가 10, 11, 12, ... 인 계차수열을 이룬다.
 따라서 제10행의 첫 번째 수는

$$a_{10} = \frac{10^2 + 10}{2} = 55 \text{ 이고}$$

제10행의 7번째 열의 수는

$$\begin{aligned} & 55 + (10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15) \\ &= 55 + \frac{6(10) + 15}{2} = 130 \end{aligned}$$

39. 길이가 같은 성냥개비 20개를 다음 그림과 같은 방법으로 쌓아 완성된 계단 모양을 한 개 만들려고 한다. 20개를 모두 쌓았더니 성냥개비 몇 개가 부족하여 계단을 완성할 수 없었다. 계단을 완성하기 위해 필요한 성냥개비의 최소의 개수는?



- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

필요한 성냥개비의 수가 이루는 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.

$$\{a_n\} : 4, 10, 18, 28, \dots$$

$$\{b_n\} : 6, 8, 10, \dots$$

$$b_n = 2n + 4 \text{ 이므로}$$

$$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 4)$$

$$= 4 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 4(n-1)$$

$$= n^2 + 3n \quad (n \geq 2)$$

이것은 $n = 1$ 일 때도 성립하므로

$$a_n = n^2 + 3n$$

$$\therefore n = 3 \text{ 일 때, } a_3 = 18,$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } a_4 = 28$$

따라서, 필요한 최소의 개수는 $28 - 20 = 8(\text{개})$ 이다.

40. 아래 그림과 같이 정육각형 모양이 되도록 배열한 바둑알의 개수를 육각형정수라 한다.

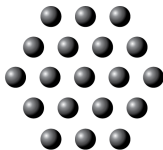
예를 들면, 첫번째 육각형정수는 1 이고, 두 번째 육각형정수는 7이다. 이때, 10번째 육각형 정수를 구하여라.



[첫 번째]



[두 번째]



[세 번째]

▶ 답 :

▷ 정답 : 271

해설

바둑알의 개수를 차례로 나열한 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하고, 그 계차 수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$$\{a_n\} : 1, 7, 19, 37, \dots$$

$$\{b_n\} : 6, 12, 18, \dots$$

이때, $b_n = 6n$ 이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k$$

$$= 1 + 6 \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= 3n^2 - 3n + 1$$

$$\therefore a_{10} = 300 - 30 + 1 = 271$$