1. 두 다항식 $A = 2x^3 + 4x^2 - 7$, $B = x^2 + x - 2$에 대하여 $A - 2B$를 간단히 한 것은?

① $2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$
② $2x^3 + 2x^2 + 2x - 3$
③ $2x^3 + 2x^2 + 2x + 3$
④ $2x^3 + 6x^2 - 2x + 3$
⑤ $2x^3 + 6x^2 - 2x - 3$

해설

$A - 2B$ 를 동류항끼리 묶어 정리한다.

$$\begin{aligned} A - 2B &= (2x^3 + 4x^2 - 7) - 2(x^2 + x - 2) \\ &= 2x^3 + 4x^2 - 7 - 2x^2 - 2x + 4 \\ &= 2x^3 + (4-2)x^2 - 2x - 7 + 4 \\ &= 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

2. 등식 $3x+4=a(x-1)+b(x+1)+3$이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=1,\ b=0$ ② $a=-1,\ b=2$ ③ $a=1,\ b=-2$

④ $a=0,\ b=2$ ⑤ $a=1,\ b=2$

해설

우변을 전개하여 좌변과 계수를 비교하면

$a+b=3,\ \ -a+b+3=4$

연립하여 풀면 $a=1,\ b=2$

3. 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt[3]{-8}+\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{-8}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}+\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{2}}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(주어진 식)

$$=\sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt{4}+\sqrt{8}i\cdot\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{16}i}{\sqrt{4}i}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}+\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$$

$$=-2+2+\sqrt{8\cdot 2}i^2+\sqrt{\frac{16}{4}}-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$=-2+2-4+2$$

$$=-2$$

※ 참고

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 항상 성립하는 a, b의 부호를 생각해 보자.

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 이므로

$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$이 된다고 계산할 수도 있다.

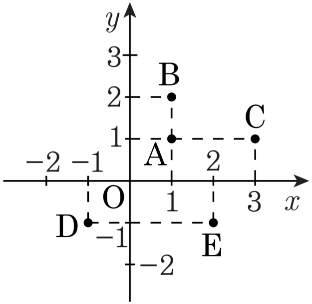
그러나 조심해야 할 것은 공식에서 주어지는 조건들이다.

즉, $a<0$, $b<0$일 때를 제외한 경우에만 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 성립한다.

마찬가지로 $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{-\frac{10}{5}}=\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$라고 함부로 계산해서는 안 된다.

왜냐하면 $a>0$, $b<0$일 때를 제외한 경우에만 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 성립하기 때문이다.

4. $z = a+bi$ 에서 실수 부분은 x 좌표, 허수 부분은 y 좌표라 하고, 좌표평면 위에 복소수를 순서쌍으로 표시한다고 하자. $\dfrac{1+2i}{i}$ 를 좌표평면에 표시하였을 때의 점을 고르면?



① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

$$\frac{1+2i}{i} = \frac{(1+2i)i}{i \cdot i} = \frac{i-2}{-1} = 2-i$$ 이므로

좌표를 (실수부, 허수부) 라 하면 $(2, -1)$ 이므로

주어진 좌표는 E 이다.

5. 다음 이차방정식 중에서 한 근이 $x=-1+\sqrt{3}$ 인 것은?

① $(x+1)^2=-3$ ② $(x+1)^2=3$ ③ $(x+3)^2=-1$

④ $(x+3)^2=1$ ⑤ $(x-1)^2=1$

해설

$(x+a)^2=b$ 에서 $x+a=\pm\sqrt{b}$

$\therefore x=-a\pm\sqrt{b}$ 임을 이용해 각 방정식을 풀면

① $x=-1\pm\sqrt{-3}=-1\pm\sqrt{3}i$

② $x=-1\pm\sqrt{3}$

③ $x=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i$

④ $x=-3\pm\sqrt{1}$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-2$

⑤ $x=1\pm\sqrt{1}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

6. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 7$을 $x+2$로 나누면 나머지가 5이다. 이 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) = x^4 - 3x^2 + ax + 7$

$f(x) = (x+2)Q(x) + 5$

$\therefore\ f(-2) = 5$

$f(-2) = 16 - 12 - 2a + 7 = 5$

$\therefore\ a = 3$

7. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, a, b, c를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$　② $-1,\ 1,\ 2$　③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$　⑤ $-1,\ 2$

해설

$$x^2-2x-y^2+2y=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2)$$
$$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$$

8. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1 ② -1

③ $\sqrt{-1}$ ④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

9. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$y = ax^2 + bx - 3 = a(x-2)^2 + 5$$

$= ax^2 - 4ax + 4a + 5$ 이므로

$b = -4a,\ \ -3 = 4a + 5$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2,\ b = 8$

$\therefore a + b = 6$

10. 연립 방정식 $\begin{cases} x-y=5 \\ y+z=5 \\ z-x=2 \end{cases}$ 에서 $x+y+z$를 구하면?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

세 다항식을 더하면, $2z=12$, $z=6$

$y+6=5$, $y=-1$

$x+1=5$, $x=4$

$\therefore\ x+y+z=4-1+6=9$

11. $\dfrac{2006^3-1}{2006\times2007+1}$ 의 값을 구하면?

① 2005 ② 2006 ③ 2007 ④ 2008 ⑤ 2009

해설

$a=2006$ 로 놓으면

$$(\text{준식})=\frac{a^3-1}{a(a+1)+1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$

$$=a-1=2005$$

12. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$　　② p　　③ 0　　④ 3　　⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma=0$이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha}+\frac{-\beta}{\beta}+\frac{-\gamma}{\gamma}=-3$이 된다.

13. 사차방정식 $x^4-5x^2+4=0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^4-5x^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-4)(x^2-1)=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-2)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore \quad x=2$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1$

14. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 $2\,\mathrm{m}$ 씩 늘였더니, 넓이가 $20\,\mathrm{m}^2$ 만큼 넓어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

① 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$

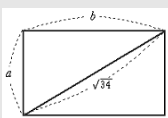
② 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$

③ 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$ 또는 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$

④ 가로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$

⑤ 가로의 길이 : $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

해설



$a^2+b^2=(\sqrt{34})^2=34$

$(a+2)(b+2)=ab+20$

$ab+2(a+b)+4=ab+20$

$\therefore\ a+b=8$

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=64-34=30$

$\therefore\ ab=15\ b=8-a$

$a\cdot(8-a)=15\ \rightarrow\ (a-5)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3, b=5$ 또는 $a=5, b=3$

15. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2+2x+k=0$, $x^2+kx+2=0$이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면

$\alpha^2+2\alpha+k=0$ 이고 $\alpha^2+k\alpha+2=0$ 이므로

$\alpha^2+2\alpha+k=\alpha^2+k\alpha+2$

$(2-k)\alpha+(k-2)=0$

따라서 $\alpha=1$ 이고

$1+2+k=0$ 이므로 $k=-3$

16. x^{100} 을 $x+2$ 로 나눈 몫을 $a_{0+}a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{99}x^{99}$ 라 할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{99}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{5}(1-2^{100})$ ② $\frac{1}{6}(1-2^{100})$ ③ $\frac{1}{4}(1-2^{100})$
④ $\frac{1}{3}(1-2^{100})$ ⑤ 1

해설

(i) $f(x)=x^{100}=(x+2)Q(x)+R$ 라 하면

$f(-2)=2^{100}=R$

$\therefore\ R=2^{100}$

$f(1)=3Q(1)+R$

$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{3}(1-R)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

(ii) $Q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{99}x^{99}$

$\therefore\ Q(1)=a_0+a_1+\cdots+a_{99}$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_{99}=Q(1)=\frac{1}{3}(1-2^{100})$

17. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+a$

④ $b-a$ ⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다

18. 자연수 n 에 대하여 $i(1+i)^n$ 이 양의 실수일 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$i(1+i)^n = p(p>0)$, $(1+i)^n = \frac{p}{i} = -pi$

즉, $(1+i)^n =$ 음수 $\times\, i$ 이어야 한다.

이 때, n 이 홀수이면 $(1+i)^n$ 은 순허수꼴이 될 수 없다.

$n = 2k$ 일 때, $(1+i)^{2k} = (2i)^k$

$k = 4m$ 이면 $(2i)^{4m}$ 이 양의 정수이므로

$k = 4m+1 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+1} \Rightarrow$ 양수 $\times\, 2i$

$k = 4m+2 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+2} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-4)$

$k = 4m+3 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+3} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-8i)$

따라서 $k = 4m+3$, 즉 $n = 2k = 8m+6$ 일 때 조건을 만족한다.

주어진 수 중에서 알맞은 것은 22 이다.

19. 방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근을 α, $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근을 β라 할 때, $\beta^3+\frac{1}{\beta}^3$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\alpha^3-3\alpha+1=0$에서 $\alpha^3-3\alpha=-1$

$\beta^2-\alpha\beta+1=0$에서 양변을 β로 나누면

$$\beta+\frac{1}{\beta}=\alpha(\because \beta\neq 0)$$

$$\therefore \beta^3+\frac{1}{\beta}^3=\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3-3\beta\cdot\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)$$

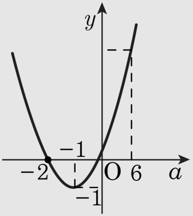
$$=\alpha^3-3\alpha=-1$$

20. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+4=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-(a+2)$, $\alpha\beta=2a+4$ 이므로
$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$
$=(a+2)^2-(2a+4)=a^2+2a=(a+1)^2-1$
또한, 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로
$D=(a+2)^2-4(2a+4)\geq 0$
$a^2-4a-12\geq 0$, $(a+2)(a-6)\geq 0$
$\therefore a\leq -2$, $a\geq 6$
따라서, $y=(a+1)^2-1$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



그러므로 $a=-2$ 일 때$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ 의 최솟값은 0 이다.