

1. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 약수}\}$ 에서 집합 B 의 원소를 포함하는 A 의 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 3\}$

▷ 정답 : $\{1, 2, 3\}$

해설

집합 B 를 원소나열법으로 나타내면 $B = \{1, 2, 4\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중 1, 3을 원소로 포함하는 부분집합을 구하면 $\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$ 이다.

2. 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\{2\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 6\}$$

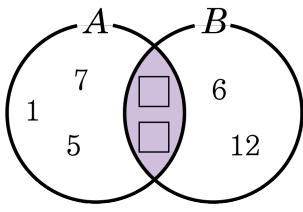
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$\{2\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 6\}$ 의 의미는 $\{1, 2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중
원소 2를 반드시 포함하는 부분집합 이므로 집합 X 를 구하면
 $\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}$
이므로 개수는 8개 이다.

3. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}, B = \{3, 6, 9, 12\}$ 를 벤 다이어그램으로 나타낼 때, $\square$ 안에 알맞은 수를 쓰시오.



▶ 답 :

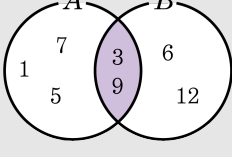
▶ 답 :

▶ 정답 : 3

▶ 정답 : 9

해설

$A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{3, 6, 9, 12\}$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



4. $a > b > 0$ 일 때, 다음 $2a + b$, $a + 2b$ 의 대소를 비교하면?

① $2a + b < a + 2b$

② $2a + b \leq a + 2b$

③ $2a + b > a + 2b$

④ $2a + b \geq a + 2b$

⑤ $2a + b = a + 2b$

해설

$$(2a + b) - (a + 2b) = a - b > 0$$

$$\therefore 2a + b > a + 2b$$

5. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

6. 양의 정수 전체의 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.
 $f(x) = (x \text{의 약수의 개수})$ 이 때, 다음 중 $f(x) = 4$ 인 x 가 될 수 있는
것을 고르면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 24

해설

5의 약수 : 1, 5 $\Rightarrow f(5) = 2$
9의 약수 : 1, 3, 9 $\Rightarrow f(9) = 3$
12의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\Rightarrow f(12) = 6$
15의 약수 : 1, 3, 5, 15 $\Rightarrow f(15) = 4$
24의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 $\Rightarrow f(24) = 8$
따라서 보기 중 $f(x) = 4$ 인 것은 15

7. 두 함수 f, g 가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x - 1) = -6x + 5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

① 18 ② 12 ③ -15 ④ -24 ⑤ -29

해설

$$(f \circ g)(5) = f(g(5))$$

$2x - 1 = 5$ 에서 $x = 3$ 이므로

$$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$$

$$\therefore (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$$

8. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 를 나타낸 것이다. 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면 무엇인가?

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 1) \\ 1 - x & (x < 1) \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{㉢}} \quad f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

- ① ㉠

② ㉡

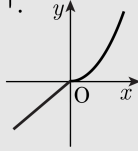
③ ㉢

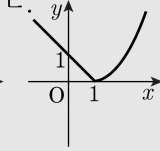
④ ㉡, ㉢

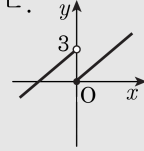
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때
 역함수가 존재한다.
 이 때, 보기의 그래프는 다음 그림과 같다.

㉠.


㉡.


㉢.


따라서, 함수 ㉢이 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

9. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2 \end{aligned}$$

10. 다음 함수의 그래프 중 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹치는 것은?

① $y = \frac{2x-1}{x-1}$ ② $y = \frac{2x}{x-1}$ ③ $y = \frac{2x+1}{x-1}$
④ $y = \frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y = \frac{2x}{2x+1}$

해설

① $y = \frac{2x-2+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$

② $y = \frac{2x-2+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

③ $y = \frac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$

④ $y = \frac{2x-1+1}{2x-1} = 1 + \frac{1}{2x-1}$

⑤ $y = \frac{2x+1-1}{2x+1} = 1 - \frac{1}{2x+1}$

따라서, ① 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축, y 축 방향으로 각각 1, 2 만큼 평행이동시킨 것이다.

11. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q 는 p 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

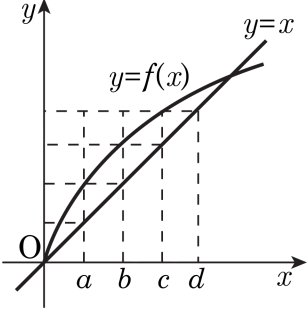
▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q \therefore P \subset Q$ 이므로 $P \subset Q$
 $\therefore q$ 는 p 이기 위한 필요조건

12. $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b + f(b) + f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



- ① b ② $b + d$ ③ $2b + c$
④ $b + c + d$ ⑤ $a + b + c$

해설

그림에서 $f(b) = c$, $f^{-1}(b) = a$ 이므로
 $b + f(b) + f^{-1}(b) = b + c + a$

13. $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{2}{(a+1)(a+3)} + \frac{3}{(a+3)(a+6)}$ 을 간단히 한 것은 ?

- ① $\frac{1}{a} + \frac{6}{a+6}$ ② $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+6}$ ③ $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+6}$
④ $\frac{1}{a} - \frac{6}{a+6}$ ⑤ $\frac{2}{a} - \frac{1}{a+6}$

해설

(준식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+6} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+6} \end{aligned}$$

14. 함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하였더니 함수 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$ 의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -3$

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+a}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
 $y = \sqrt{-2(x-1)+a+b} = \sqrt{-2x+2+a+b}$
이 식이 $y = \sqrt{-2x+4} - 3$ 과 같으므로
 $2+a=4, b=-3$
 $\therefore a=2, b=-3$

15. 두 집합 $A = \{(x, y) \mid y = \sqrt{2x-1}\}$, $B = \{(x, y) \mid y = mx + 1\}$ 에서 $A \cap B \neq \emptyset$ 일 때, m 의 값의 범위를 구하면?
- ① $-2 \leq m \leq \sqrt{2}$ ② $-1 \leq m \leq \sqrt{2} - 1$
 ③ $-2 \leq m \leq \sqrt{2} - 1$ ④ $-2 \leq m \leq \sqrt{3} - 1$
 ⑤ $-1 \leq m \leq \sqrt{3} - 1$

해설

그림에서 직선 ㉠이 점 P를 지날 때부터 ㉠과 점 Q에서 접할 때까지의 m 의 값이 구하는 범위이다.

(i) P $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 지날 때, $m = -2$

(ii) 접할 때는 $\sqrt{2x-1} = mx + 1$ 에서
 $m^2x^2 + 2(m-1)x + 2 = 0$
 $\therefore \frac{D}{4} = (m-1)^2 - 2m^2 = 0$
 $\therefore m = -1 + \sqrt{2} \ (\because m > 0)$

(i), (ii)에서 $-2 \leq m \leq \sqrt{2} - 1$

16. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A - B) \cap X = A - B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A$ 이고 $(A - B) \cap X = A - B$ 이므로 $(A - B) \subset X$ 이다. $\therefore (A - B) \subset X \subset A$

$A - B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X 는 6, 8, 10 을 반드시 포함하는 A 의 부분집합이다.

따라서 $2^{5-3} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

17. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

- ① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$
- ② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$
- ③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$
- ④ $x \leq 2$ 이면 $|x - 1| \leq |x - 3|$
- ⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

- ① 거짓 : (반례) $x = -2, y = -1$ 일 때,
 $xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
- ② 거짓 : (반례) $x = -2, y = 3$ 일 때,
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
- ③ 거짓 : (반례) $x = 2, y = -2$ 일 때,
 $2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
- ④ $|x - 1| \leq |x - 3|$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
- ⑤ 명제 ‘ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ ’ 은 참이지만, 그의 역 ‘ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ ’은 거짓이다.

18. 집합 $A = \{1, 2, \emptyset, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

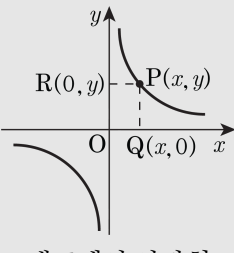
- ① $\{1, 2\} \notin A$ ② $\emptyset \subset A$ ③ $\emptyset \in A$
④ $A \subset A$ ⑤ $1 \in A$

해설

- ① $\{1, 2\} \in A$

19. 함수 $y = \frac{6}{x}$ 의 그래프 위의 한 점 P에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 할 때, 사각형 OQPR의 둘레의 길이의 최소값은?
(단, $x > 0$, O는 원점)
- ① $6\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설



그래프에서 사각형 OQPR의
 (가로의 길이 : x , 세로의 길이 : $y = \frac{6}{x}$)

둘레는 $2(x + y) = 2\left(x + \frac{6}{x}\right) \geq$

$2 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{6}{x}} = 4\sqrt{6}$

$\therefore$ 둘레의 최소값 $= 4\sqrt{6}$

해설

사각형 OQPR의
 (가로의 길이 : x 세로의 길이 : $y = \frac{6}{x}$)

$2(x + y)$ 의 최소값을 구하는 문제이다.
 $2(x + y) = k$ 라 놓고
 $y = \frac{6}{x}$ 의 관계식과 연립해서 푼다.

$k = 2\left(x + \frac{6}{x}\right)$

이 식을 x 에 대한 이차식으로 정리하면
 $kx = 2x^2 + 12, 2x^2 - kx + 12 = 0$
두 근의 합, 곱 모두 양,
실근을 가질 조건 ($D \geq 0$)을 이용
 $D = k^2 - 96 \geq 0$
 $\therefore k \geq \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \quad (\because k > 0)$

20. 함수 $y = \frac{x-3}{x-1}$ 과 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 최솟값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$y = \frac{x-3}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y = \sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에 서 만나려면
 $k \geq 3$ 이어야 하므로 k 의 최솟값은 3 이다.

